

ASTÉRISQUE 100

FAISCEAUX PERVERS

崑 层

Alexander Beilinson

Joseph Bernstein

Pierre Deligne

Ofer Gabber

翻译：ChatGPT 5.6 Sol

校对：郭宁 张秉宇

2026 年 9 月 7 日更新

法国数学会 2018

仅作交流学习使用

摘要

本卷介绍崱层理论。第一章给出三角范畴上 t -结构的定义与基本性质。第二章分别在分层空间和概形的框架下，引入任意崱度的崱层与中间扩张函子。第三章讨论若干补充主题，包括滤过导出范畴与实现函子，以及层的导出范畴中的局部化。第四章汇集自对偶崱度下崱层的基本性质。第五章是全书的核心，研究有限域上代数簇的混合 ℓ -进崱层，特别包含中间扩张纯性定理、分解定理和相对 Lefschetz 困难定理。第六章说明如何把第五章的结果用于复代数几何。本版另收勘误与补遗、补充参考文献，以及关于若干常用函子之 t -正合性的附录。

Résumé

Ce volume présente la théorie des faisceaux pervers. Les définitions et les propriétés de base des t -structures sur les catégories triangulées sont données dans le premier chapitre. Le second chapitre introduit les faisceaux pervers et le foncteur de prolongement intermédiaire (pour toute perversité), tant dans le cadre des espaces stratifiés que dans celui des schémas. Le troisième chapitre traite de divers sujets complémentaires (catégories dérivées filtrées et foncteur de réalisation, localisation dans la catégorie dérivée des faisceaux). Le quatrième chapitre rassemble des propriétés de base des faisceaux pervers pour la perversité autoduale. Le cinquième chapitre est le cœur de ce livre. Il est consacré à l'étude des faisceaux ℓ -adiques pervers mixtes sur les variétés sur un corps fini ; il contient notamment le théorème de pureté du prolongement intermédiaire, le théorème de décomposition, et le théorème de Lefschetz difficile relatif. Le sixième chapitre explique comment utiliser les résultats du chapitre précédent en géométrie algébrique complexe. La présente édition comprend une liste d'errata et d'addenda, une bibliographie additionnelle et un appendice sur la t -exactitude de certains foncteurs utiles.

目录

摘要	i
目录	iii
第二版前言	v
0 导论	1
1 三角范畴的阿贝尔子范畴	9
1.1 三角范畴	9
1.2 阿贝尔子范畴	19
1.3 t -范畴	22
1.4 粘合	38
2 分层空间与概形上的层	53
2.1 分层空间	53
2.2 概形	63
3 补篇	75
3.1 滤过导出范畴、典范滤过与笨滤过	75
3.2 局部化	87
3.3 整数上同调	102
4 自对偶层度：几何性质	105
4.1 仿射态射	106
4.2 正合性与伴随	112
4.3 简单对象	116
4.4 消失圈（上界估计）	118
4.5 贝蒂数估计	121
5 自对偶层度：权	127
5.1 [1] 中结果的回顾	127
5.2 一个逆命题	135
5.3 权滤过	140

5.4 纯复形	146
6 从 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{C}$	153
6.1 原理	153
6.2 例	163
参考文献	171
缩写	171
符号索引	173
附录	175
勘误与补遗	181
补充参考文献	189
中英法术语对照表	191

第二版前言

本卷重印《崑层》(*Faisceaux pervers*)。该书原刊于 *Astérisque* 第 100 号，是“奇异空间上的分析与拓扑”会议论文集的第一卷；会议于 1981 年 7 月 6 日至 10 日在 Luminy 举行。原文保持不变，另增一篇短附录、一份勘误与补遗¹，以及补充书目。

正如导论开头所述，Ofer Gabber 当初不愿列为 *Astérisque* 100 的共同作者。诸位作者十分欣喜，他在这一版中加入了作者之列。

¹页边每个编号均指向原书第 173 页起的相应勘误或补遗。

0 导论

起初，我们原定由 O. Gabber 共同署名本文。但他不愿对文中可能存在的错误或不严谨之处共同负责，因而选择不列名。不过，本文所采用的许多精妙思想仍应归功于他；读者也应感谢他提出的诸多批评，我们希望这些意见确已帮助我们改进了书稿。

在 [4]、[5]、[6] 中，M. Goresky 与 R. MacPherson 定义并研究了一类适当空间 X 的相交同调 (*intersection homology*; 法: *homologie d'intersection*)。在 [4]、[5] 中， X 是一个定向分片线性伪流形 (*oriented piecewise-linear (PL) pseudomanifold*; 法: *pseudo-variété PL orientée*)：若 $\dim X = n$ ，则 X 是一个分片线性空间，其中存在维数不超过 $n - 2$ 的稀疏闭分片线性子空间 Σ ，而 $X \setminus \Sigma$ 是纯 n 维定向分片线性流形。空间 X 带有一个分层 (*stratification*; 法: *stratification*) S ，即由闭分片线性子空间组成的滤过

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X,$$

其中 $X_i \setminus X_{i-1}$ 是纯 i 维流形，且 (X, S) 沿 $X_i \setminus X_{i-1}$ 等奇异 (*equisingular*; 法: *équisingulier*)。假设 $X_{n-1} = X_{n-2}$ 。对每个崑度 (*perversity*; 法: *perversité*)

$$p = (p_2, \dots, p_n), \quad p_2 = 0, \quad p_{k+1} = p_k \text{ 或 } p_k + 1,$$

他们把 X 的崑度 p 的第 i 个相交同调群 $IH_i^p(X)$ 定义为如下群：取 X 中的 i 维分片线性奇异闭链，要求它与 X_{n-k} 的交集维数至多为 $i - (k - p_k)$ ，再模去适当的同调关系。所得群与分层 S 无关。若余维至少为 2 的单形之链环 (*link*; 法: *link*) 均连通²，则当 $p = 0$ 时所得为上同调群 $H^{n-i}(X)$ ；当 p 为最大崑度时，所得为同调群 $H_i(X)$ 。在 [6] 中，他们减弱了对 X 的条件，并证明 $IH_i^p(X)$ 是拓扑不变量。

我们最关心的是这样的情形：分层 S 的每个片层 (*stratum*; 法: *strate*) 均为偶数维，而 p 是中间崑度 (*middle perversity*; 法: *perversité intermédiaire*)，按上述记号即

$$p_{2k} = k - 1, \quad p_{2k+1} = k - 1 \text{ 或 } k$$

(两种取法均可)。所得群与 $\mathbb{Q}$ 的张量积记为 $IH_i(X)$ 。这些群满足 Poincaré 对偶 [4][5]。将系数由 $\mathbb{Q}$ 扩张到 $\mathbb{R}$ 后，还可把它们解释为 L^2 上同调群 (见本次会议 J. Cheeger 的报告)。

设 $X(\mathbb{C})$ 是一个连通正规复代数簇所对应的拓扑空间，取通常拓扑，并设该簇的复维数为 n 。我们可以令 S 由代数片层组成，于是各片层的实维数自动为偶数，因而中间崑度的相交同调群有定义。若只假设 X 不可约，记其正规化为 $\tilde{X}$ ，则定义

$$IH_i(X(\mathbb{C})) := IH_i(\tilde{X}(\mathbb{C})).$$

²据勘误第 1 条修正。

与 $\mathbb{C}$ 张量后, 这些群可以用和乐模 (*holonomic module*; 法: *module holonome*) 描述。³为此, 采用代数和乐模较为方便: 它是带可积联络并满足适当有限性条件的拟凝聚模。设 X 嵌入某个纯 d 维光滑代数簇 Z , 并假设 X 在 Z 中闭。记 X° 为 X 的光滑部分, $j: X^\circ \hookrightarrow Z$ 为包含映射。则在 Z 上存在支集含于 X 的不可约和乐模 $j_{!*}\mathcal{O}_{X^\circ}$, 它在 X° 上与 $\mathcal{H}_{X^\circ}^{d-n}(\mathcal{O})$ 等同。连同这一等同, 它在唯一同构意义下唯一。若 X 完备, 则

$$IH_i(X(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{H}^{d+n-i}(Z, \Omega^*(j_{!*}\mathcal{O}_{X^\circ})).$$

右端既可理解为: 在赋予 Zariski 拓扑的 Z 上, 取复形 $\Omega^*(j_{!*}\mathcal{O}_{X^\circ})$ 的超上同调 (*hypercohomology*; 法: *hypercohomologie*); 也可理解为: 在赋予通常拓扑的 $Z(\mathbb{C})$ 上, 取以 $j_{!*}\mathcal{O}_{X^\circ}$ 为系数的全纯 de Rham 复形的超上同调。若 X 不必完备, 同样可得到由局部有限链定义的相交同调版本; 通常意义下 $X(\mathbb{C})$ 的相交同调群, 则由 $Z(\mathbb{C})$ 上 $\Omega^*(j_{!*}\mathcal{O}_{X^\circ})$ 的紧支集超上同调给出。

不与 $\mathbb{C}$ 张量时, $IH_i(X(\mathbb{C}))$ 也可表为超上同调群。我们将证明: 若 X 是维数为 n 的不可约代数簇, 则导出范畴 $D(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 中存在如下对象 $\underline{IC}$ 。其上同调层 $\mathcal{H}^i(\underline{IC})$ 可构造 (*constructible*; 法: *constructible*), 并且在 $i \notin [-2n, -n]$ 时为零。它由下列三个条件唯一确定:

- (a) 存在 X 的稠密 Zariski 开子集 U , 使得 $\underline{IC}|_{U(\mathbb{C})}$ 同构于仅在次数 $-2n$ 处为常值层 $\mathbb{Q}$ 的复形;
- (b) 对 $i > -2n$, 上同调层 $\mathcal{H}^i(\underline{IC})$ 的支集之复余维至少为 $i - 2n + 1$; ⁴
- (c) X 的每个余维 $c > 0$ 的不可约子簇 Z 都含有稠密开子集 V , 使得支集上同调层 $\mathcal{H}_{V(\mathbb{C})}^i(\underline{IC})$ 在 $i \leq -2n + c$ 时为零。

连同 (a) 中给定的同构, $\underline{IC}$ 在唯一同构意义下唯一, 并且

$$IH_i(X(\mathbb{C})) = \mathbb{H}_c^{-i}(X(\mathbb{C}), \underline{IC}).$$

以下换一种方式编号会更方便。在本导论余下部分, 记

$$IH'^i(X(\mathbb{C})) := IH_{n-i}(X(\mathbb{C})), \quad \underline{IC}' = \underline{IC}[-n],$$

于是

$$IH'^i(X(\mathbb{C})) = \mathbb{H}_c^i(X(\mathbb{C}), \underline{IC}').$$

$IH_i(X(\mathbb{C}))$ 仅在 $i \in [0, 2n]$ 时可能非零, 而 $IH'^i(X(\mathbb{C}))$ 仅在 $i \in [-n, n]$ 时可能非零。条件 (b)、(c) 可改写如下: X 的每个维数为 d 的真不可约子簇 Z , 都含有稠密 Zariski 开子集 V , 使得

(b') 当 $i \geq -d$ 时, $\mathcal{H}^i(\underline{IC}')$ 在 $V(\mathbb{C})$ 上的限制为零;

(c') 当 $i \leq -d$ 时, $\mathcal{H}_{V(\mathbb{C})}^i(\underline{IC}') = 0$ 。

³据勘误第 2 条修正。原文此处的 *en terme* 应为 *en termes*, 不影响中文译意。

⁴译者注: 原书及英文排印版均作 $i - 2n + 1$, 这里依原文保留; 但该式与下文的等价条件 (b') 不相容, 疑应为 $i + 2n + 1$ 。此项不见于 2018 年版所附勘误表。

设 X 为复代数簇。所谓 X 上的崴层 (*perverse sheaf*; 法: *faisceau pervers*), 是指导出范畴 $D(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 中的对象 K , 其上同调层 $\mathcal{H}^i K$ 可构造, 且在 $|i|$ 充分大时为零 (即 $K \in D_c^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$), 并满足下述条件: X 的每个维数为 d 的不可约子簇 Z 都含有稠密 Zariski 开子集 V , 使得

(b'') 当 $i > -d$ 时, $\mathcal{H}^i(K)|_{V(\mathbb{C})} = 0$;

(c'') 当 $i < -d$ 时, $\mathcal{H}_{V(\mathbb{C})}^i(K) = 0$ 。

注意: 若 X 不可约, 这里并不排除 $Z = X$ 。此时 $\underline{IC}'$ 是崴层。

条件 (b'') 等价于

$$\dim \operatorname{Supp} \mathcal{H}^i K \leq -i,$$

因而 $i > 0$ 时 $\mathcal{H}^i K = 0$ 。M. Artin 在证明仿射簇的上同调维数定理时已经引入了这类条件 (SGA 4 XIV §2–4)。条件 (c'') 一类的条件则常见于代数凝聚层理论, 在那里称为深度条件 (*depth condition*; 法: *condition de profondeur*)。

“崴层”既不是通常意义下的层, “崴”也不是对象本身的性质, 因此这个名称需要说明。我们中有些人并不喜欢原文的 *pervers* 一词; 它来自“崴度” *perversité*。在 $IH^p(X)$ 中, 崴度 p 衡量允许闭链偏离于分层横截性的程度。那么, 为何仍称为“层”? 若把系数由 $\mathbb{Q}$ 换成 $\mathbb{C}$, 并设 X 为纯 n 维光滑簇, 则函子

$$M \mapsto \Omega^*(M)[n]$$

(解析 de Rham 复形) 给出如下两个范畴之间的等价: X 上具有正则奇点 (包括无穷远处) 的代数和乐模, 与 X 上的崴层。对任意嵌入纯 d 维光滑簇 Z 的闭子簇 X , 应改为考虑 Z 上支集含于 X 的和乐模, 并采用函子

$$M \mapsto \Omega^*(M)[d]|_{X(\mathbb{C})}.$$

光滑 X 上的和乐模是 D_X -模的层; 它们的性质提示了崴层的若干性质。仍以 $\mathbb{Q}$ 为系数域, 例如有:

由 [Kas75], 复流形上和乐模的平移解复形与平移 de Rham 复形均为 [KS90] 定义 10.3.1 意义下的崴层, 且二者互为对偶。⁵

- X 上的崴层构成一个阿贝尔范畴。
- 崴层具有局部性: 当 U 遍历 X 的 Zariski 开集时, U 上的崴层范畴构成一个叠 (*stack*; 法: *champ*)。注意, 导出范畴 $D_c^b(U(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 并不具有同样的性质。
- 对开嵌入 $j: U \hookrightarrow X$ 及其补集的闭嵌入 $i: F \hookrightarrow X$, 有一套与普通层相似的六函子形式体系

$$j_!, j^*, j_*, i^*, i_*, i^!.$$

相应的崴层函子在左上方标以 p 。下面这条经验法则说明, 普通层范畴中的哪些结论能够推广到崴层: 把层范畴换成其反范畴, 并交换 $j_!$ 与 j_* 、 i^* 与 $i^!$ 后所得的对偶命题, 也应成立。

⁵据勘误第 3 条修正。

例如：

a) 若 F 是 X 上的崴层，则有正合列

$$0 \longrightarrow {}^p i_* {}^p i^! F \longrightarrow F \longrightarrow {}^p j_* {}^p j^* F.$$

对普通层也有这一结论；其对偶是

$$j_! j^* F \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow 0$$

的正合性。对崴层，相应的对偶正合列左端一般不能补零；普通层则可以。

b) 若 F 是 U 上的崴层，则有自然态射

$$\alpha : {}^p j_! F \longrightarrow {}^p j_* F.$$

对普通层， α 是单态射；其对偶命题“ α 是满态射”一般不成立。对崴层， α 一般也不是单态射。函子

$$j_{!*} : F \longmapsto \operatorname{Im}({}^p j_! F \longrightarrow {}^p j_* F)$$

称为中间扩张 (*intermediate extension / middle extension*; 法: *prolongement intermédiaire*)，对我们十分重要。若 X 是维数为 n 的不可约簇， U 是光滑稠密 Zariski 开子集，而 $\mathbb{Q}[n]$ 是 $U(\mathbb{C})$ 上仅在次数 $-n$ 处为常值层 $\mathbb{Q}$ 的崴层，则

$$\underline{IC}'(X) = j_{!*}(\mathbb{Q}[n]).$$

在某些方面，崴层的性质甚至优于普通层。例如：

- 在崴层的阿贝尔范畴中，每个对象都具有有限长度 (*finite length*; 法: *longueur finie*) (参见和乐模的类似结论)。
- 若 $j : U \hookrightarrow X$ 是仿射开集的嵌入，则函子 ${}^p j_*$ 正合。
- $D_c^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 上的 Verdier 对偶 (*Verdier duality*; 法: *dualité de Verdier*) 把崴层变为崴层。这解释了相交同调中的 Poincaré 对偶，也与光滑 X 上和乐模具有良好对偶相呼应。

可构造普通层与崴层都构成 $D_c^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 的阿贝尔子范畴 C 。在这两种情形中，都有从 $D_c^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 到 C 的“上同调层”函子 H^i ，并服从同一套形式体系：长正合列、把 K 剥离为 $H^i K[-i]$ 等。普通层的范畴 C 适合处理逆像函子；崴层的范畴则适合 Verdier 对偶以及某些直像问题，例如仿射态射、消失圈 (*vanishing cycles*; 法: *cycles évanescents*) 和相对 Lefschetz 困难定理。

若 X 是代数闭域 k 上的有限型概形，则崴层的形式体系可以直接移植到 ℓ -进上同调中 (ℓ 与 k 的特征指数 (*characteristic exponent*; 法: *exposant caractéristique*) 互素)：只需把 $D_c^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 换成导出 $\mathbb{Q}_\ell$ -范畴 $D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 。特别地，对不可约 X 可定义相交同调群 $IH_i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 。当 $k = \mathbb{C}$ 时，它们与 $IH_i(X(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ 典范同构。

对一般基域, 困难在于当时文献中尚无可用的 $D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 定义。O. Gabber 有一个定义, 但尚未写成文字。所幸, 我们尤其关心有限域, 而在有限域情形, 一个朴素定义已经足够; 这是因为对任意有限域 k , $H^*(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/\ell)$ 都是有限的。

本书主要结果的一种表述如下: 若 X_0 是有限域 k 上的有限型概形, 则 X_0 上每个混合 (*mixed*; 法: *mixte*) 的简单层 F_0 都是纯的 (*pure*; 法: *pur*)。“混合”这一性质在所有通常运算下稳定, 而且实践中几乎总能满足; “简单”则是指在层阿贝尔范畴中为简单对象。若 X_0 不可约, 则层 $\underline{IC}'$ 简单且混合。记 $q = |k|$, 取 k 的代数闭包 $\bar{k}$, 令

$$X = X_0 \otimes_k \bar{k},$$

并令 F 为 F_0 在 X 上的逆像。“纯”是一个局部性质; 当 X 完备时, 它保证存在整数 w (称为 F_0 的权 (*weight*; 法: *poids*)), 使 Frobenius F^* 在 $H^i(X, F)$ 上的每个特征值都是代数数, 且其所有复共轭的绝对值都等于

$$q^{(w+i)/2}.$$

在一维情形, 这一结果等价于 [1] 1.8.4。此后, D. Kazhdan 与 G. Lusztig 在与 Schubert 簇有关的若干特殊情形中也得到了它。第一个一般性证明由 O. Gabber 给出, 与本书的证明不同。该定理提供了大量纯复形, 从而使 [1] §6 对纯复形的研究获得了更实质的内容。

下面概述本书各章。

第 1 章。 关于三角范畴 (*triangulated category*; 法: *catégorie triangulée*), 我们以 J.-L. Verdier [10] 为基本参考。1.1 节给出若干补充、动机与例子。

在 1.2 节中, 设三角范畴 D 带有满足公理 (1.2.0) 与 (1.2.4(ii)) 的全子范畴 C , 即一个可容许阿贝尔子范畴 (*admissibly abelian subcategory*; 法: *sous-catégorie abélienne admissible*)。若 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的阿贝尔范畴, 且 $D = D^+(\mathcal{A})$, 并把它认作 $\mathcal{A}$ 中下有界内射复形的同伦范畴, 则公理 1.2.0 保证: 若 $X, Y \in C$, 而 $f, g: X \rightrightarrows Y$ 是同伦的复形态射, 则该同伦在二阶同伦意义下唯一。也就是说, f 与 g 之间的两个同伦 H_1, H_2 由某个二阶同伦 H' 联系; H' 又在三阶同伦意义下唯一, 如此继续。我们将证明 C 是阿贝尔范畴。

D 上的每个 t -结构 (*t-structure*; 法: *t-structure*) (1.3.1) 都定义一个 D 的可容许阿贝尔子范畴 C (1.2.5、1.3.6), 称为该 t -结构的心 (*heart*; 法: *cœur*); 反向也有部分结论 (1.3.13)。设 $\mathcal{A}$ 为阿贝尔范畴, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{A}$ 中对核、余核和扩张稳定的严格全阿贝尔子范畴; 记 $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ 为导出范畴中所有满足 $H^i K \in \mathcal{C}$ 的 K 所成的全子范畴。则 $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ 的全子范畴对

$$(D_{\mathcal{C}}^{\leq 0}(\mathcal{A}), D_{\mathcal{C}}^{\geq 0}(\mathcal{A}))$$

构成 $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$ 上的 t -结构, 其心为 $\mathcal{C}$ 。1.3 节所体现的一条经验法则是: 在这一模型情形成立的结论, 通常对任意 t -结构也成立。例如, 可以定义截断函子 τ , 以及上同调函子 $H^0: D \rightarrow \mathcal{C}$ 等。例外是 3.1 节: 那里需要给 D 添加额外资料, 才能构造自然函子 $D^b(\mathcal{C}) \rightarrow D$ 。

我们还研究 t -范畴 (即带 t -结构的三角范畴) 之间的正合函子 T 如何诱导其心之间的函子 pT , 以及该函子的正合性与伴随性质。

1.4 节给出一种构造 t -结构的方法。第 2 章将用它构造以崴层范畴为心的 t -结构。粗略地说，给定拓扑空间 X 、开嵌入 $j : U \hookrightarrow X$ 及补集的闭嵌入 $i : F \hookrightarrow X$ ，要由 $D(U)$ 与 $D(F)$ 上的 t -结构导出 $D(X)$ 上的 t -结构。即使 $D(U)$ 与 $D(F)$ 上只是自然 t -结构 (1.3.2) 的平移，所得 t -结构也已经并不显然。

ℓ -进上同调的需要迫使我们置身于更抽象的框架，在那里把 $D(X)$ 、 $D(U)$ 与 $D(F)$ 之间的关系形式化。正是在这一框架中，我们建立崴层范畴之间的函子 $j_!, j^*, j_*, i^*, i_*, i^!$ 以及中间扩张 $j_{!*}$ 的形式体系。

第 2 章。 在 2.1 节中，我们考虑分层空间 (X, S) ，重复 1.4 的构造，为每个崴度函数 $p : S \rightarrow \mathbb{Z}$ 在 $D(X)$ 上赋予一个 t -结构。具体说，是把各片层 S 上 $D(S)$ 的自然 t -结构平移 $p(S)$ 后再拼接起来。在 2.2 节中，我们考虑概形；取越来越细的代数分层，对 2.1 节的 t -结构取极限，得到所需 t -结构；同时也处理 ℓ -进情形。

第 3 章。 本章技术性较强，收录若干补充材料；读者初读时不妨略过。

在 3.1 节中，我们使用滤过导出范畴 (*filtered derived category*; 法: *catégorie dérivée filtrée*)。在某些情形下，若 $\mathcal{D}$ 是以 $\mathcal{C}$ 为心的 t -范畴，它们使我们能够定义函子 $D^b(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ (3.1.10)。该函子全忠实的充要条件是：对每个 $i > 0$ ，函子

$$C \times C \longrightarrow (\text{Ab}), \quad (X, Y) \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y[i])$$

均为可消去的 (*effaceable*; 法: *effaçable*) 函子 (3.1.16)。

在 3.2 节中，我们给出拼接局部给定的导出范畴对象的判据。在 $i < 0$ 时各层 $H^i R\text{Hom}$ 消失的假设下，对象的拼接可以像普通层一样完成。该判据适用于崴层； ℓ -进情形已在 2.2.19 中以另一种方法处理。

在 3.3 节中，我们说明当系数由 $\mathbb{Q}$ (或 $\mathbb{Q}_\ell$) 换成 $\mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{Z}_\ell$) 时，应如何修改相交同调的形式体系。

第 4、5 章只考虑域 k 上的有限型概形 (4.4 节除外) 和中间崴度。第 4 章处理几何结果；假设 k 代数闭几乎不损失一般性。第 5 章中 k 是有限域，所研究的现象是算术的，但基变换到 k 的代数闭包后会产生几何推论。

第 4 章。 4.1 节把 M. Artin 关于仿射态射高阶直像的定理 (SGA 4 XIV 3.1) 置于崴层这一自然框架中陈述。4.4 节为邻近圈 (*nearby cycles*; 法: *cycles proches*) 函子证明一个类似定理。4.2 节用崴层及其函子性的语言，给出 4.1 和若干已知结果的推论。4.3 节证明崴层范畴既是 Artin 的，也是 Noether 的。4.5 节为纯性定理 5.3.4 的证明作准备；其主题可概括为：“半维上同调群最大，也最有意思。”

第 5 章。 设 X_0 是有限域 k 上的分离有限型概形， $\bar{k}$ 是 k 的代数闭包， $X = X_0 \otimes_k \bar{k}$ 。5.1 节回顾 [1] 中关于权形式体系的若干定义与结果，并研究 X_0 上的崴层和带 Frobenius 作用的 X 上崴层之间的关系。

依 [1] 3.3.1、6.2.3，若 $K_0 \in D_c^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的权不超过 w (*weight at most w* ; 法: *poids au plus w*)，则 $H_c^i(X, K)$ 的权不超过 $w + i$ 。当 K_0 是崴层时，定理 5.2.1 给出这一结论的逆命题。更准确地说，它给出对偶形式的逆命题：把 H_c^i 换成 H^i ，并把

“ $\leq$ ”换成“ $\geq$ ”。只需对每个仿射概形 U 及平展 (étale; 法: étale) 态射 $U \rightarrow X$, 在 $H^0(U, K)$ 上检验即可。把 H^0 看成半维上同调群自有其理由。对仿射 U , 由 4.1.1 可知函子 $K \mapsto H^0(U, K)$ (K 为崴层) 右正合; 这与普通层的“取一点处的茎”函子所起的作用相近 (参见 4.1.6)。

5.3 节由 5.2.1 推出: 权不超过 w 的混合崴层的任意子商 (subquotient; 法: sous-quotient) 仍然权不超过 w (5.3.1); 中间扩张保持权 (5.3.2、5.3.3); 简单混合崴层是纯的 (5.3.4)。若 K_0, L_0 是 X_0 上的崴层, 则在崴层阿贝尔范畴中, K_0 被 L_0 扩张的扩张类群为

$$\mathrm{Hom}(K_0, L_0[1]),$$

它在 $D_c^b(X_0)$ 中计算。利用权不为零的 Frobenius 特征值不可能等于 1, 我们证明某些 Ext^1 消失; 由此, 每个混合崴层都具有函子性的递增权滤过 W , 且 Gr_i^W 纯且权为 i (5.3.5)。

设 $K_0 \in D_c^b(X_0, \mathbb{Q}_\ell)$, 以 $\mathcal{H}^i K_0$ 表示通常意义的上同调层, 以 ${}^p\mathcal{H}^i K_0$ 表示崴意义下的上同调层。假设 K_0 混合。按定义, K_0 的权不超过 w , 当且仅当每个 $\mathcal{H}^i K_0$ 的权不超过 $w + i$ 。5.4.1 证明, 这又等价于每个 ${}^p\mathcal{H}^i(K_0)$ 的权不超过 $w + i$ 。由对偶性, “权至少为 w ”也可在 ${}^p\mathcal{H}^i(K_0)$ 上检验, 却不能在 $\mathcal{H}^i K_0$ 上检验。

5.4.5 与 5.3.8 给出两个半单性 (semisimplicity; 法: semi-simplicité) 结果。两者都从 X_0 上的纯对象 K_0 出发, 结论则关于其在 X 上的逆像 K : 假设是算术的, 结论是几何的。5.4.5 证明

$$K \simeq \bigoplus_i {}^p\mathcal{H}^i(K)[-i],$$

5.3.8 则证明每个 ${}^p\mathcal{H}^i K$ 都是简单崴层的直和。再结合纯性在真态射直像下稳定这一事实, 可推出局部不变圈定理 (local invariant cycle theorem; 法: théorème local des cycles invariants) 与整体不变圈定理 (global invariant cycle theorem; 法: théorème global des cycles invariants) 的推广 (5.4.7、5.4.8, 并由 5.4.9 加强)。5.4.10 证明相对 Lefschetz 困难定理。

第 6 章。 第 5 章的结果对有限域代数闭包 $\mathbb{F}$ 上有限型概形的上同调给出几何推论。6.1 节说明把这些结果从 $\mathbb{F}$ 传递到 $\mathbb{C}$ 的初等方法。若命题属于代数闭域的一阶理论, 只需利用 $\mathbb{C}$ 同构于有限域代数闭包的某个超积即可; 然而我们关心的命题乍看并不等价于一阶命题, 因此还须使用可构造性等结果, 它们可以理解为表达了 ℓ -进上同调的某种可计算性。6.2 节应用这些原则, 主要结果为 6.2.5、6.2.8、6.2.9、6.2.10。

最后指出几个本应在本书中占有一席之地、而我们未能完成的主题:

- 崴层与和乐模的关系。如导论所述, 这一关系发挥了重要的启发作用; 核心陈述是 4.1.9, 本书未予证明。
- 消失圈函子 (4.4 节只有部分结果)。只要给出可用的 ℓ -进导出范畴定义, 以及“显然”态射的定义 (换言之, 这里仍有切实工作要做), 我们便知道下列命题的证明:

a) 设 X 是踪 (*trait*; 法: *trait*)⁶ (S, η, s) 上的有限型概形, 邻近圈函子

$$R\Psi : D_c^b(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow D_c^b(X_s \times_s \bar{s}, \mathbb{Q}_\ell)$$

是 t -正合的; 特别地, 它诱导崱层范畴之间的正合函子, 并与 Verdier 对偶交换。

b) 若 S 是有限域上一条曲线 S_1 在闭点处的 Hensel 化, X/S 由 S_1 上有限型概形 X_1 基变换而来, 而 F_1 是 X_1 上的混合崱层, 则 F_1 与 $R\Psi_\eta(F_1|_{X_\eta})$ 的权滤过及后者上的单值作用 (*monodromy action*; 法: *action de monodromie*) 之间存在一条推广 [1] 1.8.5 的关系。

6.1 节也未说明如何把 (b) 的几何推论从 $\mathbb{F}$ 传递到 $\mathbb{C}$ 。

- 最后, 我们没有讨论 Fourier 变换。

0.0 记号与术语

本书末尾列有术语索引与记号索引, 收录书中使用的主要新术语、新记号和非标准术语、记号。

请注意: 从 1.4 节起, 导出层范畴之间通常记作

$$f_*, f^*, f_!, f^!$$

的函子, 是通常写作 Rf_* 、 Rf^* (或 Lf^*)、 $Rf_!$ 、 $Rf^!$ 的导出函子; 普通层范畴之间的同名函子, 则在左上方标以 o , 它们对应崱度 0。

⁶译者注: 本书将 *trait* 译作“踪”, 指离散赋值环的谱; 它是赋值环谱的一种特定情形。

1 三角范畴的阿贝尔子范畴

1.1 三角范畴

关于三角范畴的定义和基本性质，参见 J.-L. Verdier [10]。本节说明 Verdier 的各条公理—尤其是八面体公理—并作若干补充。

1.1.1 三角范畴

所谓三角范畴，是一个加性范畴 D ，配备一个平移函子 (*translation functor*; 法: *foncteur de translation*)

$$X \mapsto X[1],$$

以及一族形如

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

的三角，称为好三角 (*distinguished triangle*; 法: *triangle distingué*)。要求平移函子是范畴的自等价，并且好三角满足 [10, p. 3] 的公理 TR 1–TR 4。

平移函子的第 n 次迭代记为 $X \mapsto X[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$)。在图中，次数为 n 的箭头标以 (n) 。好三角通常线性地写作

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

(或简记为 (X, Y, Z))，也可画成

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow (1) & & \nwarrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array}$$

若不致混淆，次数为 1 的箭头不再标注 (1) 。记

$$\mathrm{Hom}^n(X, Y) := \mathrm{Hom}(X, Y[n]).$$

反范畴 D^{opp} 的平移函子取自 $X \mapsto X[1]$ 的逆函子。于是， D 中次数为 n 的箭头 $X \rightarrow Y$ ，在 D^{opp} 中给出同次数的箭头 $Y \rightarrow X$ 。若 (X, Y, Z) 是 D 中的好三角，则规定 (Z, Y, X) 为 D^{opp} 中的好三角。如此得到的 D^{opp} 仍是三角范畴，因此可以运用对偶论证。

在三角范畴中，每个态射 $f : X \rightarrow Y$ 都可以作为某个好三角 (X, Y, Z) 的第一条边； Z 在同构意义下唯一，但同构一般并不唯一（同构唯一的一种情形见 1.1.10）。称第三个顶点 Z 为 f 的一个锥（cone；法：cône）。对每个 T ，好三角 (X, Y, Z) 都给出正合列

$$\mathrm{Hom}(T, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T, Z)$$

和

$$\mathrm{Hom}(Z, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, T).$$

好三角可以旋转：由 TR 2,

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{d} X[1]$$

为好三角，当且仅当

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{d} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$$

为好三角。因此，上述正合列可以延长为长正合列。

三角范畴的公理来自以下 1.1.2–1.1.5 的例子。

1.1.2

设 $\mathcal{A}$ 为加性范畴。定义范畴 $K(\mathcal{A})$ ：其对象是 $\mathcal{A}$ 中对象组成的复形；对复形 K, L ，令

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(K, L) = \{K \text{ 到 } L \text{ 的复形态射之同伦类}\}.$$

K 的平移 $K[1]$ 由

$$(K[1])^n = K^{n+1}$$

给出，同时把微分变号。若 $\mathbb{Z}[1]$ 表示仅在次数 -1 处为 $\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Z}$ -模复形，则按通常的符号约定， $K[1] = \mathbb{Z}[1] \otimes_{\mathbb{Z}} K$ 。

每个逐次分裂的复形短正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

都定义一个三角：选择一个分裂 $s : M \rightarrow L$ （不要求它是复形态射），并把从 M 到 K 的次数为 1 的态射定义为 $ds - sd$ 。与这种方式所得三角同构的三角，定义为好三角。这里的符号约定应与 [10] 一致，但与 [7, Ch. I, §2] 及 [8] 不同。

对每个复形态射 $f : K \rightarrow L$ ，都存在 $f' : K' \rightarrow L'$ ，它在 $K(\mathcal{A})$ 中与 f 同构，并且每个分量

$$f'^i : K'^i \longrightarrow L'^i$$

都是分裂单态射。具体做法是：向 L 添加 K 上同伦于零的“锥”复形，并向 f 添加 K 到其锥的显然态射。这解释了 TR 1：每条箭头都能作为一个好三角的第一条边。

1.1.3

J.-L. Verdier 在 [10, pp. 13–19] 中说明, 如何通过分式演算 (*calculus of fractions*; 法: *calcul de fractions*) 从一个三角范畴构造另一些三角范畴。若 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔范畴, 则其导出范畴 $D(\mathcal{A})$ 是由 $K(\mathcal{A})$ 对拟同构 (*quasi-isomorphism*; 法: *quasi-isomorphisme*) 取逆所得的三角范畴。复形的每个短正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

都在 $D(\mathcal{A})$ 中定义一个好三角 [10, p. 31]。

1.1.4

更一般地, 设 $\mathcal{A}$ 是 D. Quillen 意义下的正合范畴 (*exact category*; 法: *catégorie exacte*)⁷。也就是说, $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴, 并带有一类满足适当公理的“短正合列” E 。记 $(\mathcal{A}, E)$ 为从 $\mathcal{A}$ 到阿贝尔群范畴 Ab 的加性左正合反变函子所成的范畴; 这里“左正合”是指把 E 中的序列变为正合列

$$0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A).$$

关于这一表述须作如下订正与补充。⁸ 对 E 中的序列

$$(*) \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} P \longrightarrow 0,$$

应要求 j 是 i 的余核, 使 $A \mapsto h_A$ 有定义; 并要求 $(\widetilde{\mathcal{A}}, E)$ 为阿贝尔范畴, 且 $A \mapsto h_A$ 的本质像对扩张封闭。在这些条件下, 施加在 E 上的公理可用下列条件表达:

- (a) 存在从 $\mathcal{A}$ 到某个阿贝尔范畴的全忠实加性函子 F , 其本质像对扩张稳定 (*stable under extensions*; 法: *stable par extensions*), 并且一个序列属于 E 当且仅当它在 F 下的像是短正合列;
- (b) 函子 $A \mapsto h_A$ 从 $\mathcal{A}$ 到 $(\widetilde{\mathcal{A}}, E)$ 全忠实, 并且一个序列属于 E 当且仅当它的像是短正合列。

条件 (b) 若不加上述假设并不充分。Gabber 的反例是: 令 $\mathcal{A}$ 为形如 $\mathbb{Z}^n \oplus (\mathbb{Z}/2)^m$ 的有限生成交换群所成的范畴, 并令 E 为在交换群范畴中正合的序列。此时可容许满态射就是满同态, 并给出 Grothendieck 预拓扑; 然而

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$$

中两个可容许单态射的复合不再可容许, 故 $\mathcal{A}$ 不是正合范畴。又要保证 $(\widetilde{\mathcal{A}}, E)$ 为阿贝尔范畴, 一组充分条件是: 对每个 $(*) \in E$, i 是 j 的核; 并且可容许满态射沿任意态射的纤维积可表示, 所得投影仍同构于可容许满态射。在前一条件下, 加性反变函子 F 属于 $(\mathcal{A}, E)$, 等价于对每个 $(*) \in E$ 都有

$$F(P) \xrightarrow{\sim} \ker(F(N) \rightrightarrows F(N \times_P N)).$$

⁷D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Lecture Notes in Math. 341 (1973), pp. 77–139, 尤其见 pp. 15–16。

⁸据勘误第 4 条修正。

Quillen 所断言的嵌入见 [Lau83]; 若 $\mathcal{A}$ 不是小范畴, 还须另行处理通常的大小问题。

假设 $\mathcal{A}$ 的每个态射都有核。若 $\mathcal{A}$ 中对象组成的复形 K 满足各序列

$$0 \longrightarrow \ker(d^n) \longrightarrow K^n \longrightarrow \ker(d^{n+1}) \longrightarrow 0$$

均短正合, 就称 K 零调 (*acyclic*; 法: *acyclique*); 等价地, K 在 $(\widetilde{\mathcal{A}}, E)$ 中的像 h_K 零调。 $K(\mathcal{A})$ 中由零调复形组成的全子范畴 (*acycl.*) 是 [10, p. 13] 意义下的厚子范畴 (*thick subcategory*; 法: *sous-catégorie épaisse*)。导出范畴

$$D(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A})/(\text{acycl.})$$

由 $K(\mathcal{A})$ 对所有锥为零调复形的态射取逆而得。

例 1. 设 $\mathcal{A}$ 为阿贝尔范畴, $F(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 中带有限滤过的对象所成的范畴。对 $F(\mathcal{A})$ 中的序列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0,$$

若 $gf = 0$, 且对每个 n , 序列

$$0 \longrightarrow \text{Gr}^n X \longrightarrow \text{Gr}^n Y \longrightarrow \text{Gr}^n Z \longrightarrow 0$$

在 $\mathcal{A}$ 中正合, 就称原序列正合。范畴 $DF(\mathcal{A})$ 就是滤过导出范畴: 它由 $KF(\mathcal{A})$ 对滤过拟同构取逆而得。

例 2. 设 $\mathcal{A}$ 为 Banach 空间范畴。若把短正合列取为忘掉拓扑后成为正合列的序列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0,$$

则 1.1.4 的条件成立。若进一步只取那些使投影 $Y \rightarrow Z$ 有连续截面 (不要求线性) 的序列, 条件仍然成立。

1.1.5

稳定同伦范畴 (*stable homotopy category*; 法: *catégorie homotopique stable*) 也是三角范畴。其对象取为二元组 (X, n) , 其中 X 是有限带基点 CW 复形, $n \in \mathbb{Z}$ 。群

$$\text{Hom}((X, n), (Y, m))$$

是下列群关于 i 的归纳极限: 保持基点的映射

$$S^{n+i} X \longrightarrow S^{m+i} Y$$

的同伦类群。平移函子为

$$(X, n) \longmapsto (X, n+1) \simeq (SX, n),$$

好三角则由子复形嵌入 $X \hookrightarrow Y$ 定义:

$$X \hookrightarrow Y \longrightarrow Y/X \longrightarrow SX \longrightarrow \dots$$

函子

$$H_0 : (X, n) \mapsto \tilde{H}_{-n}(X)$$

(约化同调) 是一个上同调函子 [10, p. 10]

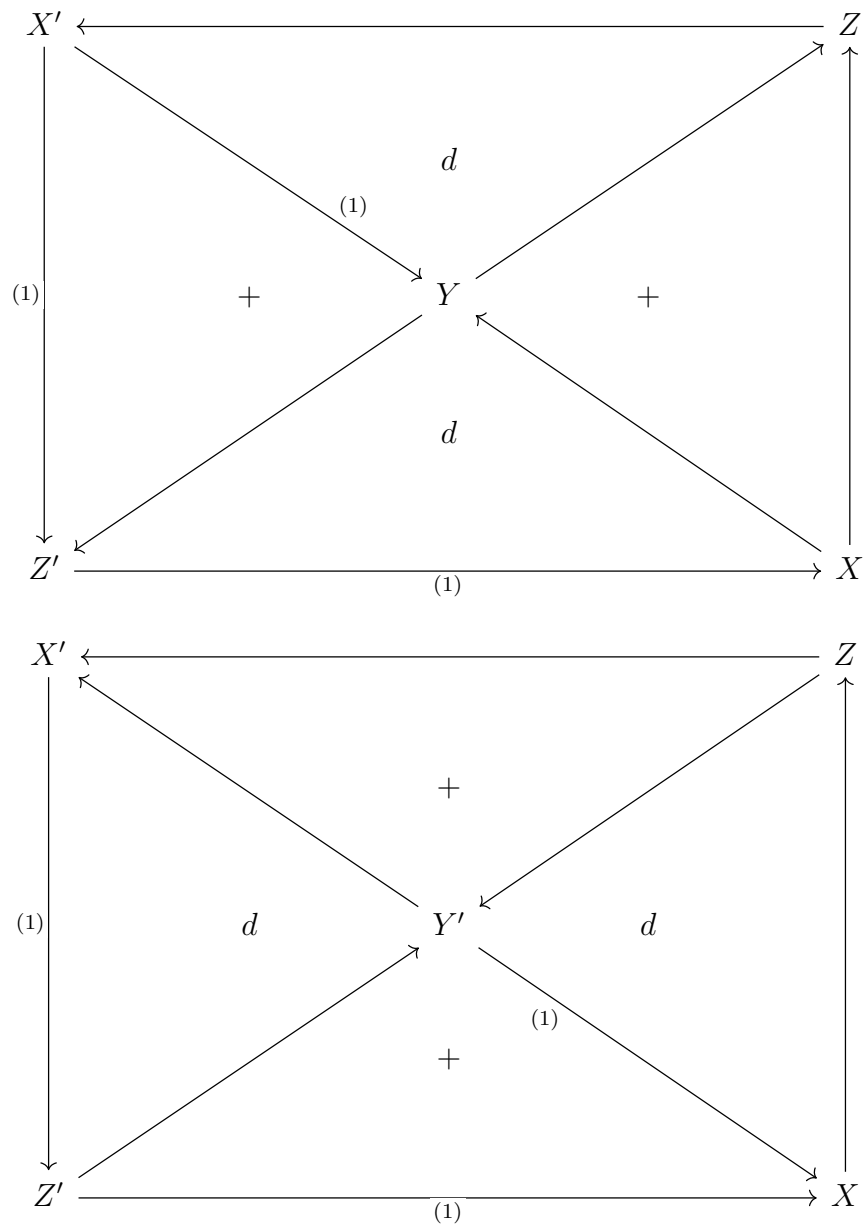
(稳定同伦范畴) $\rightarrow$ (阿贝尔群).

“约化链复形” 构造把它提升为正合函子 [10, p. 4]

(稳定同伦范畴) $\rightarrow D(\text{Ab})$.

1.1.6

八面体图 (*octahedral diagram*; 法: *diagramme de l'octaèdre*) 如下。它可拆成两个有共同周界的图:



第一图称为上帽图 (*upper cap*; 法: *calotte supérieure*), 第二图称为下帽图 (*lower cap*; 法: *calotte inférieure*)。两图的周界相同; 标 $+$ 的三角要求可交换, 标 d 的三角要求为好三角。还要求从 Y 经 Z 或 Z' 到 Y' 的两条复合箭头相同, 从 Y' 经 X 或 X' 到 Y 的两条复合箭头也相同。若略去箭头的次数, 这个图具有四阶对称性: 转过四分之一周, 同时交换上帽与下帽 (见 1.1.14)。

三角范畴的公理 TR 4 断言: 每个上帽图都可以补成一个八面体图。实质上, 上帽图由两个共享一个顶点的好三角组成, 再添上复合箭头即可。次数为 1 的箭头的位置虽已确定, 却可通过平移各顶点并用公理 TR 2 旋转好三角而改变; 此时须留意符号。例如, 在 TR 1–TR 3 下, TR 4 等价于:

TR 4'. 每个下帽图都可以补成一个八面体图。

在同构意义下, 给出一个上帽图等同于给出一列箭头 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$: 只须分别在这两条箭头上构造好三角, 而所得好三角在同构意义下唯一。也等同于给出再由好三角 (X, Z, Y') 补全的上帽图。这个补全后的上帽图还能补成八面体, 正是 [10] 中 TR 4 的表述。

1.1.7 公理 TR 4 的说明

在例 1.1.2 的三角范畴 $K(\mathcal{A})$ 中, 设滤过复形 K 带有三阶滤过

$$0 = W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset W_2 = K,$$

且该滤过逐次分裂。于是它定义一个八面体; 按顺序取

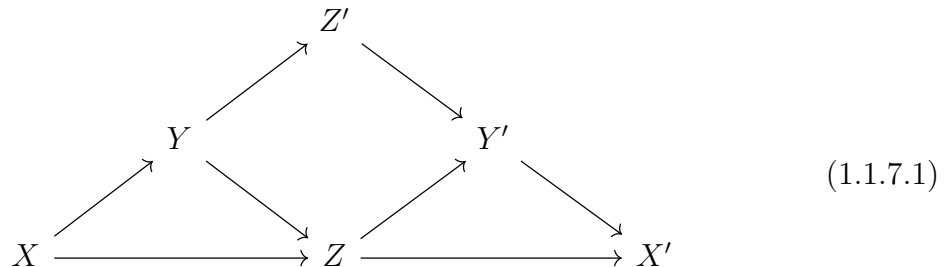
$$(X, Y, Z, X', Y', Z') = (W_0, W_1, W_2, W_2/W_1, W_2/W_0, W_1/W_0).$$

所以周界上的 (X, Z, X', Z') 就是

$$(\mathrm{Gr}_0^W K, K, \mathrm{Gr}_2^W K, \mathrm{Gr}_1^W K).$$

公理之所以成立, 是因为任意复形态射链 $K \rightarrow L \rightarrow M$ 在 $K(\mathcal{A})$ 中都同构于某条 $K' \rightarrow L' \rightarrow M'$, 并且各 $K'^i \rightarrow L'^i$ 、 $L'^i \rightarrow M'^i$ 都是分裂单态射。

八面体图有时可改写为下列形式:



图中还隐含四个好三角的次数为 1 的末箭头。这样写突出了好三角之间的态射

$$(X, Y, Z') \longrightarrow (X, Z, Y') \longrightarrow (Y, Z, X') \longrightarrow (Z', Y', X'),$$

但对每个态射，都有一个相应的可交换方块未直接显现。另一方面，这种写法破坏了一项对称性，因而补足上述序列的好三角态射

$$(Z', Y', X') \longrightarrow (Z', X[1], Y[1])$$

也未直接显现。

1.1.8

在阿贝尔范畴中，两条可复合的单态射 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 给出如下短正合列图：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & X' & \xlongequal{\quad} & X' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \tag{1.1.8.1}$$

它表达了

$$(Z/X)/(Y/X) = Z/Y.$$

图 (1.1.7.1) 与 (1.1.8.1) 的关系如下。设 (1.1.8.1) 是 $\mathcal{A}$ 中对象的复形所成阿贝尔范畴 $C(\mathcal{A})$ 中的图。 $C(\mathcal{A})$ 中每个短正合列都在 $D(\mathcal{A})$ 中定义一个好三角 [10, p. 31]；由 (1.1.8.1) 各短正合列得到的好三角构成八面体图 (1.1.7.1)。

以下是一个特例。借助函子

$$A \mapsto \text{仅在次数 } 0 \text{ 处为 } A \text{ 的复形},$$

把阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 看作 $D(\mathcal{A})$ 的全子范畴。对 $\mathcal{A}$ 中任意短正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

恰有一条次数为 1 的箭头 $d: C \rightarrow A$ ，使三角

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \xrightarrow{d} A[1]$$

为好三角。存在性是“复形的每个短正合列都定义好三角”的特例 [10, p. 31]；唯一性由下文 1.1.10 以及 $A, B \in \mathcal{A}$ 时 $\text{Hom}^n(A, B) = 0$ ($n < 0$) 推出。对 $n \geq 0$ ，该群就是 A 被 B 扩张的第 n 个 Yoneda Ext。若从 $\mathcal{A}$ 中的图 (1.1.8.1) 出发，在 $D(\mathcal{A})$ 中把其中每个短正合列补成好三角，便得到图 (1.1.7.1)；这是 TR 4 的推论。

命题 1.1.9. 设 (X, Y, Z) 与 (X', Y', Z') 为两个好三角，并给定 $g: Y \rightarrow Y'$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{d} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{d'} & X'[1]. \end{array}$$

以下条件等价:

- (a) $v'gu = 0$;
- (b) 存在 f 使左方块可交换;
- (b') 存在 h 使右方块可交换;
- (c) 存在三角态射 (f, g, h) 。

若这些条件成立且 $\text{Hom}^{-1}(X, Z') = 0$ ，则 (b) 中的 f 与 (b') 中的 h 都唯一。

证明. 把正合列

$$\text{Hom}^{-1}(X, Z') \longrightarrow \text{Hom}(X, X') \longrightarrow \text{Hom}(X, Y') \longrightarrow \text{Hom}(X, Z')$$

应用于 $gu \in \text{Hom}(X, Y')$ ，便得 (a) $\Leftrightarrow$ (b); 若 $\text{Hom}^{-1}(X, Z') = 0$ ，还得到 f 的唯一性。(b) $\Rightarrow$ (c) 来自 TR 3⁹: 若 f 满足 (b)，便存在 h 使 (f, g, h) 成为三角态射。逆向显然。最后，对偶论证给出 (a) $\Leftrightarrow$ (b')，以及同一消失条件下 h 的唯一性。□

推论 1.1.10. 设

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{d} X[1]$$

为好三角。若 $\text{Hom}^{-1}(X, Z) = 0$ ，则:

- (i) u 的锥在唯一同构意义下唯一;
- (ii) d 是唯一使

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{x} X[1]$$

成为好三角的态射 $x: Z \rightarrow X[1]$ 。

证明. 在 1.1.9 中取 $X = X'$ 、 $Y = Y'$ ，并令 f, g 为恒等态射。于是 $Z \simeq Z'$ ，故 $\text{Hom}^{-1}(X, Z') = 0$; (i) 随即由 h 的唯一性得到。对 (ii)，把 1.1.9 应用于

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{d} & X[1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{x} & X[1]. \end{array}$$

必有 $h = \text{Id}_Z$ ，从而 $d = x$ 。对偶地，在 1.1.10 的条件下， v 的锥也在唯一同构意义下唯一。□

⁹据勘误第 5 条修正。

下面的命题由 J.-L. Verdier 告知我们。

命题 1.1.11. 每个可交换方块

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

都可以补成下列九宫图：

$$\begin{array}{ccccccc} X'[1] & \dashrightarrow & Y'[1] & \dashrightarrow & Z'[1] & \dashrightarrow & X'[2] \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & - & \uparrow \\ X'' & \longrightarrow & Y'' & \longrightarrow & Z'' & \longrightarrow & X''[1] \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

其中虚线箭头由实线箭头施以平移函子得到。除标有 $-$ 的方块外，其余方块均可交换；标有 $-$ 的方块则反交换 (*anti-commutative*; 法: *anticommutatif*)。所有实线行与实线列都是好三角。

证明. 以给定可交换方块的四条边及其对角线 $X' \rightarrow Y$ 为底，选取好三角

$$(X', Y', Z'), \quad (X, Y, Z), \quad (X', X, X''), \quad (Y', Y, Y''), \quad (X', Y, A).$$

公理 TR 4 可将下列两个图补成八面体：

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & A \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y'' & \xlongequal{\quad} & Y'' \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & A \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Z & \xlongequal{\quad} & Z. \end{array}$$

二者的底分别为 $X' \rightarrow Y' \rightarrow Y$ 与 $X' \rightarrow X \rightarrow Y$ 。再以 $X'' \rightarrow A \rightarrow Y''$ 为底补成第三个八面体，使其中的好三角 $(A, Y'', Z'[1])$ 由第一个八面体中的 (Z', A, Y'') 旋转而来；这里须改变箭头 $Z' \rightarrow A$ 的符号。

所需的好三角均出现在这三个八面体中。唯一的例外只是 (Z', Z, Z'') 以旋转后的形态 $(Z, Z'', Z'[1])$ 出现；把箭头 $Z' \rightarrow Z$ 变号，便由后者得到前者。

下面验证所需的可交换性与反交换性。 X', Y', Z' 到 X, Y, Z 的箭头，是八面体 (1)、(2) 中三角态射的复合

$$(X', Y', Z') \longrightarrow (X', Y, A) \longrightarrow (X, Y, Z).$$

X, Y, Z 到 X'', Y'', Z'' 的箭头, 是八面体 (2)、(3) 中

$$(X, Y, Z) \longrightarrow (X'', A, Z) \longrightarrow (X'', Y'', Z'')$$

的复合; 而 X'', Y'', Z'' 到 $X'[1], Y'[1], Z'[1]$ 的箭头, 是八面体 (3)、(1) 中

$$(X'', Y'', Z'') \longrightarrow (A, Y'', Z'[1]) \longrightarrow (X'[1], Y'[1], Z'[1])$$

的复合。末一箭头由八面体 (1) 中的三角态射

$$(Z', A, Y'') \longrightarrow (Z', X'[1], Y'[1])$$

旋转得到。在好三角 $(X'[1], Y'[1], Z'[1])$ 中, 次数为 1 的箭头与好三角 (X', Y', Z') 的次数为 1 箭头之平移相差一个负号; 这就解释了第九个方块为何反交换。□

注记 1.1.12. 复形正合列的一个可交换方块在导出范畴中定义一个九宫图。第九个方块的反交换性, 恰好给出相应余边界态射的反交换性。

注记 1.1.13. 在通常的三角范畴中 ($\mathcal{A}$ 加性时的 $K(\mathcal{A})$ 、 $\mathcal{A}$ 正合时的 $D(\mathcal{A})$ 、稳定同伦范畴等), 每个“八面体上帽”都可补成一个八面体, 使下列三角也为好三角:

$$Y \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \oplus X[1] \xrightarrow{(1)} Y$$

以及

$$Y \longrightarrow Z \oplus Z' \longrightarrow Y' \xrightarrow{(1)} Y.$$

除 $Y' \rightarrow X[1]$ 与 $Z' \rightarrow Y'$ 分别取为八面体中相应箭头的相反数外, 其余箭头均来自八面体。一般情形是否如此, 我们并不知道。若这些三角确有用处, 或许应加强三角范畴的公理 $TR\ 4$, 重新定义“八面体”, 使这些三角按定义即为好三角。

注记 1.1.14. 三角图与八面体图有如下推广; $N = 3$ 与 $N = 4$ 时, 分别回到前两者。对 $N \geq 2$, 一个这样的图由以下数据组成:

- (a) 对 $\mathbb{Z}$ 的每个区间 I , 若 $0 < \#I < N$, 给定对象 $K(I)$ 。
- (b) 若 $I = [a, b[$ 、 $J = [c, d[$, 定义

$$I \leq J \iff a \leq c \text{ 且 } b \leq d.$$

对 $I \leq J$, 给定箭头 $\varphi_{JI}: K(I) \rightarrow K(J)$, 满足

$$\varphi_{KJ}\varphi_{JI} = \varphi_{KI}, \quad \varphi_{II} = \text{Id}.$$

若 $I = [a, b[$ 、 $J = [c, d[$ 且 $b \leq c$, 则 $\varphi_{JI} = 0$ 。

- (c) 对 $I = [a, b[$, 定义 $I^* = [b, a + N[$ 。给定同构

$$K(I^*) \xrightarrow{\sim} K(I)[1],$$

并要求对 $I \leq J$, 下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} K(I)[1] & \xrightarrow{\sim} & K(I^*) \\ \varphi_{JI}[1] \downarrow & & \downarrow \varphi_{J^*I^*} \\ K(J)[1] & \xrightarrow{\sim} & K(J^*) \end{array}$$

(d) 若 $a < b < c < a + N$, 则由各 φ 组成的三角

$$K([a, b]) \longrightarrow K([a, c]) \longrightarrow K([b, c]) \longrightarrow K([b, a + N]) = K([a, b])[1]$$

是好三角。

一个带 $(N - 1)$ 阶逐次分裂滤过的复形, 在 $K(\mathcal{A})$ 中定义这样的图。若 K 的滤过 W 取为递增滤过, 且

$$W_0 K = 0, \quad W_{N-1} K = K$$

(即 $i \notin [1, N - 1]$ 时 $\text{Gr}_i^W K = 0$), 则对 $1 \leq a < b \leq N$, 有

$$K([a, b]) = W_{b-1} K / W_{a-1} K, \quad K(\{0\}) = K[-1].$$

1.2 阿贝尔子范畴

1.2.0

设 D 为三角范畴, C 为 D 的全子范畴。假设对 $X, Y \in C$ 以及 $i < 0$, 均有

$$\text{Hom}^i(X, Y) := \text{Hom}(X, Y[i]) = 0.$$

例 1.2.1. D 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 的导出范畴 $D(\mathcal{A})$, 而 $C = \mathcal{A}$; 这里借助函子

$$A \mapsto \text{仅在次数 } 0 \text{ 处为 } A \text{ 的复形}$$

把 $\mathcal{A}$ 等同于 D 的全子范畴。

命题 1.2.2. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是 C 中的态射。把 f 补成好三角

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow S \longrightarrow,$$

并假设 S 又出现在某个好三角

$$N[1] \longrightarrow S \longrightarrow C \longrightarrow, \quad N, C \in C.$$

换言之，有图

$$\begin{array}{ccccc}
 N[1] & \xleftarrow{(1)} & & & C \\
 & \searrow & d & \nearrow & \\
 & & S & & \\
 & \nearrow & d & \searrow & \\
 X & \xleftarrow{(1)} & & & Y \\
 \alpha(1) \downarrow & & & & \downarrow \beta \\
 & & & &
 \end{array}
 \quad (1.2.2.1)$$

其中标 $+$ 的三角可交换，标 d 的三角为好三角。于是

$$\alpha[-1] : N \longrightarrow X$$

是 f 在 C 中的核，而 $\beta : Y \rightarrow C$ 是其余核。

证明. 对 $Z \in C$ ， Hom 的长正合列与 1.2.0 给出正合列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}^{-1}(Z, S) \longrightarrow \text{Hom}(Z, X) \longrightarrow \text{Hom}(Z, Y)$$

以及

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(Z, N) \longrightarrow \text{Hom}^{-1}(Z, S) \longrightarrow 0.$$

它们说明 $(N, \alpha[-1])$ 是 f 的核。对偶论证说明 (C, β) 是其余核。 $\square$

例. 对例 1.2.1 中的 $\mathcal{A} \subset D(\mathcal{A})$ ，态射 $f : X \rightarrow Y$ 的锥 S 是复形

$$X \xrightarrow{f} Y$$

(X 位于次数 -1 ， Y 位于次数 0)。它含有子复形

$$\ker(f)[1] = H^{-1}(S)[1],$$

而商复形 $X / \ker(f) \rightarrow Y$ 拟同构于置于次数 0 的

$$\text{coker}(f) = H^0(S).$$

由此得到图 (1.2.2.1)。

1.2.3

若 C 中的态射 $f: X \rightarrow Y$ 是某个图 (1.2.2.1) 的底边, 则称它为 C -可容许态射 (C -admissible morphism; 法: *morphisme C -admissible*); 上下文无歧义时, 简称可容许态射。

若 f 为单态射, 则由 1.2.2 有 $N = 0$, 故 $S \xrightarrow{\sim} C$, 图 (1.2.2.1) 化为好三角 (X, Y, C) 。若 f 为满态射, 则 $C = 0$, 故 $N[1] \xrightarrow{\sim} S$, 图 (1.2.2.1) 化为好三角 (N, X, Y) 。反过来, 若 C 含有零对象, 则对任意好三角¹⁰

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{d} X[1], \quad X, Y, Z \in C,$$

f 与 g 均可容许; f 是 g 的核, g 是 f 的余核。由 1.2.0 与 1.1.10, d 由 f, g 决定。

若 C 中的序列 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 是从某个好三角删去次数为 1 的箭头所得, 就称它为可容许短正合列 (*admissible short exact sequence*; 法: *suite exacte courte admissible*)。

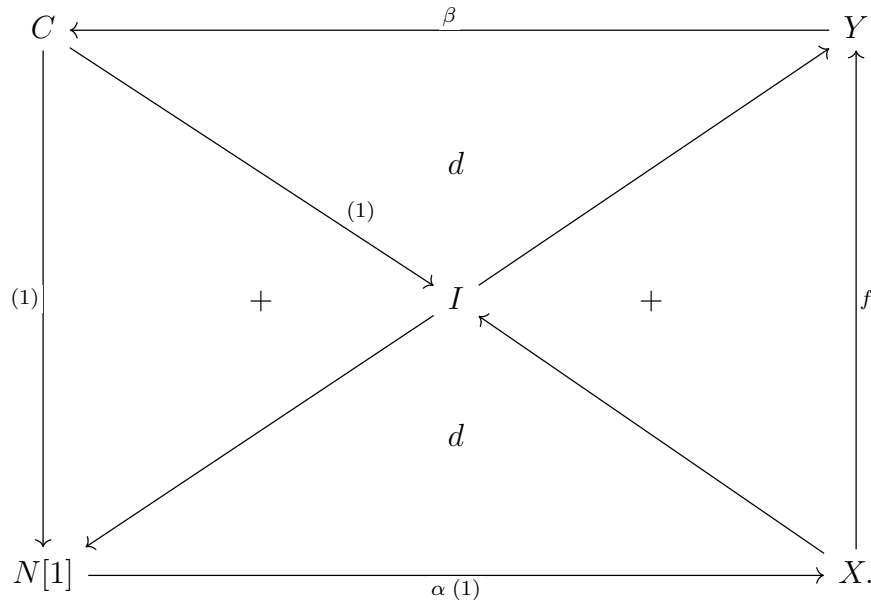
命题 1.2.4. 假设 C 对有限直和稳定。以下条件等价:

- (i) C 是阿贝尔范畴, 并且它的短正合列均可容许;
- (ii) C 的每个态射都是 C -可容许的。

证明. 先证 (ii) $\Rightarrow$ (i)。由 1.2.2, C 的每个态射都有核与余核。要证 C 为阿贝尔范畴, 只剩验证

$$\text{Coim}(f) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f).$$

把图 (1.2.2.1) 看作八面体的下帽, 并用 $\text{TR } 4'$ (见 1.1.7) 补成八面体。若把新顶点记为 I , 所得上帽可写成



由 1.2.2, β 作为 f 的余核是满态射。再由 1.2.3, 好三角 (I, Y, C) 表明 $I \in C$, 且 I 是 f 的像。¹¹对偶地, 由上帽中另一个好三角旋转得到的好三角 (N, X, I) 表明 I 是 f 的余像。最后仍由 1.2.3, C 中的短正合列均可容许。

¹⁰ 据勘误第 6 条修正。

¹¹ 译者注: 这里省略了对假设 (ii) 的一次使用。由 (ii), β 可容许; 由 1.2.3, 它可补成好三角 $(\ker \beta, Y, C)$ 。锥的同构唯一性 (1.1.10 的对偶断言) 把 I 与 $\ker \beta \in C$ 等同。

再证 (i)⇒(ii)。态射 $f : X \rightarrow Y$ 的核 N 、余核 C 与像 I 给出两个短正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow I \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow I \longrightarrow Y \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

它们是两个好三角，并组成上面的上帽图。应用 TR 4 得到下帽图，故 f 可容许。□

定义 1.2.5. 若 D 的全子范畴 C 满足 1.2.0 及 1.2.4 中的等价条件，就称 C 为可容许阿贝尔子范畴。

1.2.6

在三角范畴 D 中，若存在好三角 (X, Y, Z) ，有时称 Y 是 Z 被 X 扩张所得的对象。若对每个满足 $X, Z \in D'$ 的好三角 (X, Y, Z) ，总有 $Y \in D'$ ，就称子范畴 $D' \subset D$ 对扩张稳定。

1.3 t -范畴

定义 1.3.1. 所谓 t -范畴，是一个三角范畴 D ，配备两个严格全子范畴 (*strictly full subcategory*; 法: *sous-catégorie strictement pleine*) $D^{\leq 0}$ 与 $D^{\geq 0}$ 。令

$$D^{\leq n} := D^{\leq 0}[-n], \quad D^{\geq n} := D^{\geq 0}[-n],$$

并要求:

- (i) 若 $X \in D^{\leq 0}$ 、 $Y \in D^{\geq 1}$ ，则 $\text{Hom}(X, Y) = 0$;
 - (ii) $D^{\leq 0} \subset D^{\leq 1}$ ，且 $D^{\geq 0} \supset D^{\geq 1}$;
 - (iii) 对任意 $X \in D$ ，存在好三角 (A, X, B) ，其中 $A \in D^{\leq 0}$ 、 $B \in D^{\geq 1}$ 。
- 也称 $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ 为 D 上的一个 t -结构；其心是全子范畴

$$C := D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}.$$

例 1.3.2.

- (i) 设 $\mathcal{A}$ 为阿贝尔范畴。 $D(\mathcal{A})$ 上的自然 t -结构由下列条件定义: $D(\mathcal{A})^{\leq n}$ (相应地, $D(\mathcal{A})^{\geq n}$) 由满足

$$H^i K = 0 \quad (i > n) \quad (\text{相应地 } i < n)$$

的复形 K 组成；等价地， K 拟同构于一个在次数 $> n$ (相应地 $< n$) 处为零的复形。

验证 1.3.1(iii)。对任意复形 K ，截断 $\tau_{\leq 0} K$ 是 K 的子复形

$$\cdots \longrightarrow K^{-1} \longrightarrow \ker(d^0) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

注意, [7] 把这个截断记作 $\sigma_{\leq 0}K$, [8] 则记作 t_0K 。令

$$\tau_{\geq 1}K := K/\tau_{\leq 0}K.$$

于是 $\tau_{\leq 0}K \in D(\mathcal{A})^{\leq 0}$ 、 $\tau_{\geq 1}K \in D(\mathcal{A})^{\geq 1}$, 而短正合列

$$0 \longrightarrow \tau_{\leq 0}K \longrightarrow K \longrightarrow \tau_{\geq 1}K \longrightarrow 0$$

给出所需的好三角。1.3.1(i)、(ii) 留给读者验证。

(ii) 若 $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ 是 D 上的 t -结构, 则对每个整数 n , $(D^{\leq n}, D^{\geq n})$ 也是 t -结构, 称为由前者平移所得。

(iii) 若 $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ 是 D 上的 t -结构, 则

$$((D^{\geq 0})^{\text{opp}}, (D^{\leq 0})^{\text{opp}})$$

是反三角范畴 D^{opp} 上的 t -结构, 称为对偶 t -结构。由此可作对偶论证: 若把一个断言应用到对偶 t -范畴便得到另一个断言, 就称二者互为对偶。

以下设 D 为 t -范畴。

命题 1.3.3.

(i) 包含函子 $D^{\leq n} \hookrightarrow D$ 有右伴随 (right adjoint; 法: *adjoint à droite*) $\tau_{\leq n}$; 包含函子 $D^{\geq n} \hookrightarrow D$ 有左伴随 (left adjoint; 法: *adjoint à gauche*) $\tau_{\geq n}$ 。

(ii) 对每个 $X \in D$, 恰有一个态射

$$d \in \text{Hom}^1(\tau_{\geq 1}X, \tau_{\leq 0}X)$$

使三角

$$\tau_{\leq 0}X \longrightarrow X \longrightarrow \tau_{\geq 1}X \xrightarrow{d} \tau_{\leq 0}X[1]$$

为好三角。在唯一同构意义下, 这是唯一满足 $A \in D^{\leq 0}$ 、 $B \in D^{\geq 1}$ 的好三角 (A, X, B) 。

证明. 由对偶性与平移, 只须对 $D^{\leq 0}$ 验证 (i)。也就是说, 对每个 $X \in D$, 须找出 $A \in D^{\leq 0}$ 及态射 $A \rightarrow X$, 使对任意 $T \in D^{\leq 0}$, 映射

$$\text{Hom}(T, A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T, X)$$

为同构; 这时 A 就是 $\tau_{\leq 0}$ 在 X 处的值。取 1.3.1(iii) 中的好三角 (A, X, B) 。Hom 的长正合列与 1.3.1(i)、(ii) 给出上述同构, 故 $A = \tau_{\leq 0}X$ 。

这证明了 (i), 也证明好三角

$$(\tau_{\leq 0}X, X, \tau_{\geq 1}X)$$

存在, 并且每个 1.3.1(iii) 中的好三角 (A, X, B) , 在忘掉次数为 1 的箭头之后, 都唯一同构于它。末一箭头的唯一性来自 1.3.1(i)、(ii) 与 1.1.10(ii)。□

1.3.4

好三角 $(\tau_{\leq 0}X, X, \tau_{\geq 1}X)$ 表明, 以下条件等价:

- (a) $\tau_{\leq 0}X = 0$; 等价地,
- (a') 对每个 $T \in D^{\leq 0}$, $\text{Hom}(T, X) = 0$;
- (b) $X \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq 1}X$; 等价地,
- (b') $X \in D^{\geq 1}$.

等价关系 (a') $\Leftrightarrow$ (b') 可表述为: $D^{\geq 1}$ 是 $D^{\leq 0}$ 的右正交。这说明 $D^{\geq 1}$ 对扩张稳定 (1.2.6)。对偶地,

$$\tau_{\geq 1}X = 0 \iff X \in D^{\leq 0};$$

$D^{\leq 0}$ 是 $D^{\geq 1}$ 的左正交, 也对扩张稳定。特别地, $D^{\leq 0}$ 与 $D^{\geq 1}$ 都对有限直和稳定。

若 $a \leq b$, 则 $D^{\leq a} \subset D^{\leq b}$, 因而恰有一个态射 $\tau_{\leq a}X \rightarrow \tau_{\leq b}X$ 使下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq a}X & \longrightarrow & \tau_{\leq b}X \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X. \end{array}$$

这个态射把 $\tau_{\leq a}X$ 等同于 $\tau_{\leq a}\tau_{\leq b}X$ 。对偶地, 有态射

$$\tau_{\geq a}X \longrightarrow \tau_{\geq b}X,$$

并据此把 $\tau_{\geq b}X$ 等同于 $\tau_{\geq b}\tau_{\geq a}X$ 。

对任意整数 a , 简记

$$\tau_{>a} := \tau_{\geq a+1}, \quad \tau_{<a} := \tau_{\leq a-1}.$$

由上面的第一段平移可得

$$X \in D^{\leq a} \iff \tau_{>a}X = 0.$$

设 $X \in D^{\leq a}$ 。若 $b > a$, 则 $\tau_{\geq b}X = 0$; 若 $b \leq a$, 则

$$\tau_{>a}\tau_{\geq b}X = \tau_{>a}X = 0,$$

所以 $\tau_{\geq b}$ 把 $D^{\leq a}$ 映入自身。

命题 1.3.5. 设 $a \leq b$ 。对每个 $X \in D$, 恰有一个态射

$$\tau_{\geq a}\tau_{\leq b}X \longrightarrow \tau_{\leq b}\tau_{\geq a}X$$

使下图可交换:

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{\leq b}X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \tau_{\geq a}X \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ \tau_{\geq a}\tau_{\leq b}X & \xrightarrow{\sim} & & & \tau_{\leq b}\tau_{\geq a}X \end{array}$$

而且这个态射是同构。

证明. 从 $\tau_{\leq b}X$ 到 $\tau_{\geq a}X \in D^{\geq a}$ 的箭头, 唯一地经 $\tau_{\geq a}\tau_{\leq b}X$ 分解¹²。后者属于 $D^{\leq b}$, 故该箭头又唯一地经 $\tau_{\leq b}\tau_{\geq a}X$ 分解。这给出所求态射。

对 $\tau_{< a}X \rightarrow \tau_{\leq b}X \rightarrow X$ 应用 TR 4, 得到八面体

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \tau_{\leq b}X & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & \tau_{\geq a}X \\
 \uparrow & \nearrow & \searrow & \downarrow & \\
 \tau_{< a}X & & & & \tau_{> b}X
 \end{array} \quad (1.3.5.1)$$

在这个八面体中, 由好三角 $(\tau_{< a}X, \tau_{\leq b}X, Y)$ 及恒等式

$$\tau_{< a}X = \tau_{< a}\tau_{\leq b}X,$$

可知 $Y = \tau_{\geq a}\tau_{\leq b}X$ 。另一方面, 由好三角 $(Y, \tau_{\geq a}X, \tau_{> b}X)$, 可知 $Y = \tau_{\leq b}\tau_{\geq a}X$ 。故上述态射为同构。以后记

$$\tau_{[a,b]}X := \tau_{\geq a}\tau_{\leq b}X \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq b}\tau_{\geq a}X.$$

□

定理 1.3.6. t -范畴 D 的心

$$C := D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$$

是 D 的可容许阿贝尔子范畴, 并且对扩张稳定 (1.2.5、1.2.6)。函子

$$H^0 := \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0} : D \longrightarrow C$$

是上同调函子。

例. 在例 1.3.2 (i) 的情形¹³, C 由 $D(\mathcal{A})$ 中同构于 $\mathcal{A}$ 的对象组成 (相对于 $\mathcal{A} \hookrightarrow D(\mathcal{A})$ 的自然嵌入), 而 H^0 就是通常的零次上同调函子。

证明. 设 $X, Y \in C$, $f : X \rightarrow Y$ 的锥为 S 。好三角 $(Y, S, X[1])$ 表明

$$S \in D^{\leq 0} \cap D^{\geq -1}.$$

于是 $\tau_{\geq 0}S$ 与 $\tau_{\leq -1}S$ 分别属于 C 与 $C[1]$, 而好三角

$$(\tau_{\leq -1}S, S, \tau_{\geq 0}S)$$

给出一个图 (1.2.2.1)。所以 C 是可容许阿贝尔子范畴; 它对扩张稳定则由 1.3.4 得到。

还须证明: 对每个好三角 (X, Y, Z) , 序列

$$H^0X \longrightarrow H^0Y \longrightarrow H^0Z$$

¹²据勘误第 7 条修正。

¹³据勘误第 8 条修正。

正合。

情形 1. 若 $X, Y, Z \in D^{\leq 0}$, 则

$$H^0 X \longrightarrow H^0 Y \longrightarrow H^0 Z \longrightarrow 0$$

正合。事实上, 对 $U \in D^{\leq 0}$, $V \in D^{\geq 0}$, 有

$$H^0 U = \tau_{\geq 0} U, \quad H^0 V = \tau_{\leq 0} V,$$

以及自然同构

$$\mathrm{Hom}(H^0 U, H^0 V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U, H^0 V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U, V).$$

对任意 $T \in C$, Hom 的长正合列给出

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, T),$$

也就是

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0 Z, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0 Y, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0 X, T).$$

这对每个 T 都成立, 故得到所需正合性。

情形 2. 若 $X \in D^{\leq 0}$, 则

$$H^0 X \longrightarrow H^0 Y \longrightarrow H^0 Z \longrightarrow 0$$

正合。对 $T \in D^{\geq 1}$, Hom 的长正合列给出同构

$$\mathrm{Hom}(Z, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, T),$$

因而 $\tau_{\geq 1} Y \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq 1} Z$ 。对

$$Y \longrightarrow Z \longrightarrow \tau_{\geq 1} Z$$

应用 TR 4' (见 1.1.7), 或者对 $X \rightarrow \tau_{\leq 0} Y \rightarrow Y$ 应用 TR 4, 便得到好三角

$$(X, \tau_{\leq 0} Y, \tau_{\leq 0} Z).$$

对它应用情形 1 即得结论。

情形 2*. 对偶地, 若 $Z \in D^{\geq 0}$, 则

$$0 \longrightarrow H^0 X \longrightarrow H^0 Y \longrightarrow H^0 Z$$

正合。

一般情形. TR 4 给出八面体, 其中出现好三角¹⁴

$$(\tau_{\leq 0} X, Y, U), \quad (U, Z, (\tau_{\geq 1} X)[1]).$$

把情形 2 用于第一个三角, 得到

$$H^0 X \longrightarrow H^0 Y \longrightarrow H^0 U \longrightarrow 0;$$

把情形 2* 用于第二个三角, 得到

$$0 \longrightarrow H^0 U \longrightarrow H^0 Z.$$

因此 $H^0 X \rightarrow H^0 Y \rightarrow H^0 Z$ 正合。 □

¹⁴据勘误第 9 条修正。

1.3.7

若

$$\bigcap_n D^{\leq n} \quad \text{与} \quad \bigcap_n D^{\geq n}$$

都只含零对象, 就称这个 t -结构非退化 (*non-degenerate*; 法: *non dégénérée*)。记

$$H^i X := H^0(X[i]).$$

命题 1.3.7. 若 D 的 t -结构非退化, 则函子族 $(H^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 是保守的 (*conservative*; 法: *conservatif*)。而且, $X \in D^{\leq 0}$ (相应地, $X \in D^{\geq 0}$) 当且仅当

$$H^i X = 0 \quad \text{对所有 } i > 0 \quad (\text{相应地, 对所有 } i < 0).$$

证明. 先设 $H^i X$ 全部为零, 并证 $X = 0$ 。若 $X \in D^{\leq 0}$, 则 $H^0 X = 0$ 蕴含 $X \in D^{\leq -1}$; ¹⁵反复使用这一点, 得

$$X \in \bigcap_n D^{\leq n},$$

故 $X = 0$ 。对偶地, 若 $X \in D^{\geq 0}$, 也有 $X = 0$ 。一般情形下, $\tau_{\leq 0} X$ 与 $\tau_{\geq 1} X$ 的所有上同调对象仍为零, 因而二者都为零; 再由好三角 $(\tau_{\leq 0} X, X, \tau_{\geq 1} X)$ 得 $X = 0$ 。

若态射 $f: X \rightarrow Y$ 的锥为 Z , 且 f 在每个 H^i 下都诱导同构, 则上同调长正合列说明 $H^i Z = 0$; 故 $Z = 0$, f 为同构。这证明函子族 (H^i) 保守。

最后, 若 $i > 0$ 时 $H^i X = 0$, 则 $\tau_{>0} X$ 的所有上同调对象均为零, 于是 $\tau_{>0} X = 0$; 由 1.3.4, $X \in D^{\leq 0}$ 。关于 $D^{\geq 0}$ 的断言由对偶性得到。□

1.3.8

定理 1.3.6 从 D 上的一个 t -结构得到 D 的一个可容许阿贝尔子范畴 C 。¹⁶它有一个逆向结论, 见下文 1.3.9¹⁷; 证明将一直延续到 1.3.14。本书后文不使用这一结果。

1.3.9

设 D 为三角范畴。记 $\text{Isom}(D)$ 为 D 中对象同构类集合; 对 $X \in D$, 以 $[X]$ 表示其同构类。对 $\text{Isom}(D)$ 的两个子集 A, B , 定义

$$A * B := \{[X] \mid \text{存在好三角}(U, X, V), [U] \in A, [V] \in B\}.$$

引理 1.3.10. 运算 $*$ 满足结合律。

¹⁵译者注: 原文此处写作 $D^{\leq 1}$ 。要使下文的递降论证成立, 应读作 $D^{\leq -1}$; 这由截断三角 $(\tau_{<0} X, X, H^0 X)$ 立即得到。

¹⁶据勘误第 10 条修正。

¹⁷译者注: 原文此处引作 1.3.9; 逆向结论实际陈述于 1.3.13, 1.3.9 开始为其作准备。

证明. 只须证明, 对 $X, Y, Z \in D$,

$$(\{[X]\} * \{[Y]\}) * \{[Z]\} = \{[X]\} * (\{[Y]\} * \{[Z]\}).$$

$[T]$ 属于左端 (相应地, 右端), 当且仅当存在对象 U 及好三角 (X, U, Y) 、 (U, T, Z) (相应地, 存在对象 V 及好三角 (Y, V, Z) 、 (X, T, V))。这些三角分别组成八面体的上帽图与下帽图。包含关系 “ $\subset$ ” 由 TR 4 得到, 反向包含由 TR 4' 得到。□

由引理 1.3.10, 可以不加括号地定义一系列子集的 $*$ -积

$$A_1 * \cdots * A_p.$$

约定空列的 $*$ -积为 $\{[0]\}$ 。

例 1.3.11.

- (i) 设 A 是 D 的严格全子范畴, EA 是 D 中包含 A 与零对象、且对扩张稳定的最小严格全子范畴。于是

$$[EA] = \bigcup_{q \geq 0} \underbrace{[A] * \cdots * [A]}_{q \text{ 个因子}}. \quad (1.3.11.1)$$

- (ii) “ A 的每个态射都是 A -可容许的” (1.2.3) 可改写为

$$[A] * [A[1]] \subset [A[1]] * [A]. \quad (1.3.11.2)$$

1.3.12

设 C 是三角范畴 D 中对扩张稳定的可容许阿贝尔子范畴。

定义 D^b 为 D 中包含所有 $C[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$) 且对扩张稳定的最小严格全子范畴。类似地, 定义 $D^{b, \leq 0}$ 、 $D^{b, \geq 0}$ 及 $D^{b, I}$ (I 是 $\mathbb{Z}$ 的区间): 分别只要求包含满足

$$-n \leq 0, \quad -n \geq 0, \quad -n \in I$$

的各个 $C[n]$, 并取其扩张闭包 (*extension closure*; 法: *clôture par extensions*)。

若 I 是空区间, 约定 $D^{b, I}$ 为只含零对象的范畴。于是对任意区间 I 都有¹⁸

$$D^{b, I} = \{A \in D^b \mid H^j A = 0, \text{ 若 } j \notin I\}.$$

这里 H^j 指下面命题 1.3.13 所构造的 t -结构的上同调函子。

命题 1.3.13. 在 D^b 上, $(D^{b, \leq 0}, D^{b, \geq 0})$ 是非退化 t -结构。若 $a \leq b$, 则

$$D^{b, [a, b]} = D^{b, \geq a} \cap D^{b, \leq b}.$$

¹⁸据勘误第 11 条修正。

特别地,

$$C = D^{b, \geq 0} \cap D^{b, \leq 0}.$$

证明. t -结构的公理 1.3.1(i) 来自 Hom 的长正合列与 1.2.0; 公理 1.3.1(ii) 显然。由于 C 对扩张稳定并满足 1.3.11(ii), 对 $\mathbb{Z}$ 的任一区间 $I = [a, b]$ ($a \leq b$), 有

$$[D^{b, I}] = [C[-a]] * \cdots * [C[-b]]. \quad (1.3.13.1)$$

若 $a \leq c < b$, 令 $J = [a, c]$ 、 $K = [c + 1, b]$, 则

$$[D^{b, I}] = [D^{b, J}] * [D^{b, K}].$$

特别地, 取 $c = 0$, 可知 $D^{b, I}$ 的每个对象都是 $D^{b, K} \subset D^{b, \geq 1}$ 中某对象被 $D^{b, J} \subset D^{b, \leq 0}$ 中某对象扩张所得。由于 D^b 是各 $D^{b, I}$ 的递增并, 这就证明了 1.3.1(iii)。

再由 (1.3.13.1), 对 $X \in D^{b, I}$, 存在一列好三角

$$(X_i, X_{i+1}, A_{i+1}) \quad (a \leq i < b),$$

其中 $X_a \in C[-a]$, 每个 $A_j \in C[-j]$, 且 $X_b = X$ 。约定 $X_{a-1} = 0$ 、 $A_a = X_a$, 并在序列开头补上好三角

$$(X_{a-1}, X_a, A_a) = (0, X_a, X_a).$$

对这些三角应用上同调长正合列, 并对 j 归纳可得: 对每个 i ,

$$H^i(X_j) = 0 \quad (i \notin [a, j]), \quad H^i(X_j) = A_i[i] \quad (i \in [a, j]).$$

特别地,

$$[X] \in \{[H^a(X)[-a]]\} * \cdots * \{[H^b(X)[-b]]\}.$$

也就是说, X 是把各上同调对象置于相应次数后逐次扩张所得。由此立即得到 t -结构的非退化性; 也得到命题的第二项断言: 若

$$X \in D^{b, \geq a} \cap D^{b, \leq b},$$

则 $i \notin [a, b]$ 时 $H^i X = 0$, 从而 $X \in D^{b, [a, b]}$. □

注记 1.3.14. 设 D 为三角范畴, C 是满足 1.2.0 的全子范畴, 并且 C 的每个态射都可容许。1.2.4 的证明表明: C 的每个态射都有核与余核,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Coim}(f),$$

而且 C 的每个短正合列都可容许。要使 C 成为阿贝尔范畴, 所缺的只是有限直和的存在性。

令 $C' := EC$ 为 C 中对象的逐次扩张所成的范畴 (1.3.11(i))。Hom 的正合列表明 C' 仍满足 1.2.0。另一方面, 把 (1.3.11.1)、(1.3.11.2) 用于 C , 再用 $*$ 的结合律, 得到

$$[C'] * [C'[1]] \subset [C'[1]] * [C'].$$

也就是说, C' 的每个态射都可容许; 故 C' 是 D 的可容许阿贝尔子范畴。

对 C' 应用 1.3.13。若从 C 出发、按 1.3.12 定义 D^b 、 $D^{b,\geq 0}$ 与 $D^{b,\leq 0}$, 则

$$(D^{b,\leq 0}, D^{b,\geq 0})$$

是 D^b 上的 t -结构, 其心为 C' 。

下面的命题给出介于截断函子 $\tau_{<0}$ 与 $\tau_{\leq 0}$ 之间的构造。

命题 1.3.15. 设 $K \in D$, 并给定 C 中的短正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow H^0 K \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

- (i) 存在 $K' \in D^{\leq 0}$ 及态射 $a: K' \rightarrow K$, 使对每个 $L \in D^{\leq 0}$, a 把 $\text{Hom}(L, K')$ 等同于 $\text{Hom}(L, K)$ 中由所有满足下述条件的 f 组成的子群: $H^0(f)$ 经 A 分解。换言之, 在 $D^{\leq 0}$ 中, K' 代表函子¹⁹

$$L \longmapsto \ker(\text{Hom}(L, K) \longrightarrow \text{Hom}(H^0 L, B)).$$

一对 (K', a) 代表该函子, 当且仅当

$$K' \in D^{\leq 0}, \quad \tau_{<0} K' \xrightarrow{\sim} \tau_{<0} K, \quad H^0 K' \xrightarrow{\sim} A \subset H^0 K. \quad (*)$$

- (ii) 对偶地, 存在 $b: K \rightarrow K''$, 其中 $K'' \in D^{\geq 0}$; 对每个 $L \in D^{\geq 0}$, 有正合列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(K'', L) \longrightarrow \text{Hom}(K, L) \longrightarrow \text{Hom}(A, H^0 L).$$

一对 (K'', b) 由下列条件刻画:

$$K'' \in D^{\geq 0}, \quad \tau_{>0} K \xrightarrow{\sim} \tau_{>0} K'', \quad H^0 K'' \xrightarrow{\sim} B.$$

- (iii) 存在次数为 1 的态射 $d: K'' \rightarrow K'$, 并且由 1.1.10 知它唯一, 使 (K', K, K'') 成为好三角。

证明. 把复合态射

$$\tau_{\leq 0} K \longrightarrow H^0 K \longrightarrow B$$

补成好三角

$$(K', \tau_{\leq 0} K, B).$$

这个三角表明 $K' \in D^{\leq 1}$ 且 $H^1 K' = 0$, 从而 $K' \in D^{\leq 0}$ 。若 $L \in D^{\leq 0}$, 则 $\text{Hom}^{-1}(L, B) = 0$, 故有正合列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(L, K') \longrightarrow \text{Hom}(L, \tau_{\leq 0} K) \longrightarrow \text{Hom}(L, B).$$

又有自然同构

$$\text{Hom}(L, \tau_{\leq 0} K) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(L, K), \quad \text{Hom}(L, B) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H^0 L, B).$$

¹⁹据勘误第 12 条修正。

所以前一系列可改写为

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(L, K') \longrightarrow \operatorname{Hom}(L, K) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H^0 L, B),$$

即 K' 代表 (i) 中的函子。

对 $L \in D^{<0}$, K' 的泛性质给出

$$\tau_{<0} K' \xrightarrow{\sim} \tau_{<0} K.$$

好三角 $(K', \tau_{\leq 0} K, B)$ 的上同调长正合列又给出

$$H^0 K' \xrightarrow{\sim} A.$$

反过来, 若 K'_1 满足 (*), 则 K' 的泛性质给出态射 $u: K'_1 \rightarrow K'$; 按假设, 它在 $\tau_{<0}$ 与 H^0 下都诱导同构, 故 u 本身是同构。这证明 (i); (ii) 由对偶性得到。

最后, 在 $K' \rightarrow \tau_{\leq 0} K \rightarrow K$ 上构造八面体。所得新顶点记为 K''_1 , 其中出现好三角

$$(B, K''_1, \tau_{>0} K).$$

这是 K''_1 的 1.3.1(iii) 型三角, 故

$$K''_1 \in D^{\geq 0}, \quad H^0 K''_1 = B, \quad \tau_{>0} K \xrightarrow{\sim} \tau_{>0} K''_1.$$

由 (ii), K''_1 与 K'' 等同; 八面体中的 (K', K, K''_1) 即 (iii) 所需的好三角。□

1.3.16

设 D_i ($i = 1, 2$) 为两个 t -范畴, C_i 为 D_i 的心, 并以 $\varepsilon_i: C_i \hookrightarrow D_i$ 表示包含函子。设

$$T: D_1 \longrightarrow D_2$$

为三角范畴间的正合函子 [10, p. 4]。若

$$T(D_1^{\leq 0}) \subset D_2^{\leq 0},$$

称 T 右 t -正合 (*right t -exact*; 法: *t -exact à droite*); 若

$$T(D_1^{\geq 0}) \subset D_2^{\geq 0},$$

称 T 左 t -正合 (*left t -exact*; 法: *t -exact à gauche*); 若二者兼具, 则称 T 为 t -正合函子。

命题 1.3.17.

(i) 若 T 左 t -正合 (相应地, 右 t -正合), 则加性函子

$${}^p T := H^0 \circ T \circ \varepsilon_1: C_1 \longrightarrow C_2$$

左正合 (相应地, 右正合)。

(ii) 若 T 左 t -正合且 $K \in D_1^{\geq 0}$, 则

$${}^pT(H^0K) \xrightarrow{\sim} H^0(TK).$$

相应地, 若 T 右 t -正合且 $K \in D_1^{\leq 0}$, 则

$$H^0(TK) \xrightarrow{\sim} {}^pT(H^0K).$$

(iii) 设 (T^*, T_*) 是一对伴随的正合函子,

$$T^* : D_2 \rightleftarrows D_1 : T_*,$$

其中 T_* 是 T^* 的右伴随²⁰。则 T^* 右 t -正合, 当且仅当 T_* 左 t -正合; 此时 $({}^pT^*, {}^pT_*)$ 是心之间的一对伴随函子。

(iv) 若 $T_1 : D_1 \rightarrow D_2$ 与 $T_2 : D_2 \rightarrow D_3$ 都左 t -正合 (相应地, 都右 t -正合), 则 $T_2 \circ T_1$ 也如此, 并且²¹

$${}^p(T_2 \circ T_1) = {}^pT_2 \circ {}^pT_1.$$

证明. 设 T 左 t -正合。对 C_1 中任意短正合列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

好三角 $(T(X), T(Y), T(Z))$ 的上同调长正合列给出

$$0 \longrightarrow H^0T(X) \longrightarrow H^0T(Y) \longrightarrow H^0T(Z),$$

因为 $T(Z) \in D_2^{\geq 0}$ 。这证明 (i); 右 t -正合的情形对偶。

若 $K \in D_1^{\geq 0}$, 则好三角 $(H^0K, K, \tau_{>0}K)$ 在 T 下变为

$$(T(H^0K), T(K), T(\tau_{>0}K)),$$

且 $T(\tau_{>0}K) \in D_2^{\geq 0}$ 。上同调长正合列遂给出

$$H^0T(H^0K) \xrightarrow{\sim} H^0T(K).$$

这证明 (ii), 对偶断言同理。

若 T_* 左 t -正合, 则对 $U \in D_1^{\geq 0}$ 、 $V \in D_2^{\leq 0}$,

$$\mathrm{Hom}(T^*V, U) = \mathrm{Hom}(V, T_*U) = 0.$$

这对每个 U 都成立, 故 $\tau_{>0}T^*V = 0$, 即 $T^*V \in D_1^{\leq 0}$; 所以 T^* 右 t -正合。对 $A \in C_1$ 、 $B \in C_2$, 有²²

$$H^0T^*B = \tau_{\geq 0}T^*B, \quad H^0T_*A = \tau_{\leq 0}T_*A.$$

²⁰译者注: 原文此处写作 “adjoint à droite de T_* ”。由所给函子的定义域与值域, 应为 T_* 是 T^* 的右伴随。

²¹据勘误第 13 条修正。

²²据勘误第 14 条修正。

因此有函子同构

$$\mathrm{Hom}(H^0 T^* B, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(T^* B, A) = \mathrm{Hom}(A, T_* B) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A, H^0 T_* B).$$

原式中后两个 Hom 项的变量顺序照录。²³ 结合对偶论证即得 (iii)。

最后, 若 T_1, T_2 左 t -正合且 $A \in C_1$, 则 $T_1 A \in D_2^{\geq 0}$, 并由 (ii)

$${}^p(T_2 \circ T_1)(A) = H^0 T_2 T_1 A = H^0 T_2 H^0 T_1 A.$$

这证明 (iv); 右 t -正合的情形对偶。 $\square$

注记 1.3.18.

(i) 令

$$D_1^+ := \bigcup_n D_1^{\geq n}, \quad D_2^- := \bigcup_n D_2^{\leq n}.$$

1.3.17(iii) 对函子

$$T^* : D_2^- \longrightarrow D_1, \quad T_* : D_1^+ \longrightarrow D_2$$

仍成立, 只须它们在下述意义下伴随: 对 $V \in D_2^-, U \in D_1^+$, 函子性地有

$$\mathrm{Hom}(T^* V, U) = \mathrm{Hom}(V, T_* U).$$

证明不变。

(ii) 对 $A \in C_1, B \in C_2$, 伴随对 (T^*, T_*) 与 $({}^p T^*, {}^p T_*)$ 的单位、余单位由下列可交换图联系:

$$\begin{array}{ccc} T^* {}^p T_* A & \longrightarrow & {}^p T^* {}^p T_* A \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^* T_* A & \longrightarrow & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & T_* T^* B \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^p T_* {}^p T^* B & \longrightarrow & T_* {}^p T^* B. \end{array}$$

1.3.19

设 $T : D' \rightarrow D$ 是三角范畴之间的全忠实正合函子。要判断 D' 中的三角 tr 为好三角, 只须判断其像 $T(\mathrm{tr})$ 为好三角。事实上, 取与 tr 有相同底边的好三角 tr_1 ; $T(\mathrm{tr})$ 与 $T(\mathrm{tr}_1)$ 是具有相同底边的好三角, 因而同构。由 T 全忠实, tr 与 tr_1 也同构。

再假设 D, D' 都带有 t -结构, 且 T 为 t -正合函子。若 $T(X) \in D^{\leq 0}$ (相应地, $T(X) \in D^{\geq 0}$), 则 $X \in D'^{\leq 0}$ (相应地, $X \in D'^{\geq 0}$)。这是因为

$$X \in D'^{\leq 0} \iff \tau_{>0} X = 0,$$

²³译者注: 这里 $A \in C_1, B \in C_2$, 而 $T_* : D_1 \rightarrow D_2$ 。因此后两项应分别读作 $\mathrm{Hom}(B, T_* A)$ 与 $\mathrm{Hom}(B, H^0 T_* A)$ 。这时中间的等式就是给定的伴随同构。

而 T 与 $\tau_{>0}$ 交换；另一半由对偶性得到。

反过来，设 D' 是三角范畴 D 的全三角子范畴， $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ 是 D 上的 t -结构。令

$$D'^{\leq 0} := D' \cap D^{\leq 0}, \quad D'^{\geq 0} := D' \cap D^{\geq 0}.$$

则 $(D'^{\leq 0}, D'^{\geq 0})$ 是 D' 上的 t -结构，当且仅当 D' 在函子 $\tau_{\leq 0}$ 下稳定。若此条件成立，称它为 D' 上的诱导 t -结构 (*induced t -structure*; 法: *t -structure induite*)。

给 D' 配备诱导 t -结构后，包含函子 $D' \hookrightarrow D$ 为 t -正合函子；此时

$$C' = D' \cap C,$$

而 D 的函子 $\tau_{\leq p}$ 、 $\tau_{\geq p}$ 、 H^p 限制到 D' 后，分别与 D' 上的同名函子等同。

1.3.20

设 $(D_i)_{i \in I}$ 是有限个三角范畴，且

$$T : \prod_{i \in I} D_i \longrightarrow D$$

是从各 D_i 到三角范畴 D 的正合多函子 (SGA 4 XVII 1.1.3)。假设各 D_i 与 D 都带有 t -结构。若 T 把 $\prod_i D_i^{\geq 0}$ 映入 $D^{\geq 0}$ ，称它左 t -正合；若把 $\prod_i D_i^{\leq 0}$ 映入 $D^{\leq 0}$ ，称它右 t -正合；若二者兼具，则称它 t -正合。

若 T 左 t -正合 (相应地，右 t -正合或 t -正合)，并把一部分变量固定为 $D_i^{\geq 0}$ (相应地， $D_i^{\leq 0}$ 或心 C_i) 中的给定对象，则所得关于其余变量的函子仍左 t -正合 (相应地，右 t -正合或 t -正合)。因此，前面对一元函子得到的结果都可用于 T 。

例如，以 $\varepsilon_i : C_i \hookrightarrow D_i$ 表示包含函子，令

$${}^pT := H^0 \circ T \circ (\varepsilon_i)_{i \in I}.$$

若 T 左 t -正合 (相应地，右 t -正合)，则从各 C_i 到 C 的加性多函子 pT 对每个变量都左正合 (相应地，右正合)。

假设 T 左 t -正合。若 $K_i \in D_i^{\geq 0}$ ，则由 1.3.17(ii)，

$${}^pT(H^0 K_i) \xrightarrow{\sim} H^0 T(K_i).$$

对任意 K_i ，态射 $K_i \rightarrow \tau_{\geq 0} K_i$ 给出

$$H^0 T(K_i) \longrightarrow H^0 T(\tau_{\geq 0} K_i) \xleftarrow{\sim} {}^pT(H^0 K_i). \quad (1.3.20.1)$$

平移后，更一般地，对满足 $\sum_i n_i = n$ 的整数族 (n_i) ，得到态射

$$H^n T(K_i) \longrightarrow {}^pT(H^{n_i} K_i). \quad (1.3.20.2)$$

这里有一个符号问题；若改而考虑

$$H^n T(K_i) \longrightarrow H^n T((H^{n_i} K_i)[-n_i]), \quad (1.3.20.3)$$

这个问题便不出现。

若 T 右 t -正合, 则对 $K_i \in D_i^{\leq 0}$,

$${}^pT(H^0 K_i) \xleftarrow{\sim} H^0 T(K_i).$$

态射 $\tau_{\leq 0} K_i \rightarrow K_i$ 给出

$${}^pT(H^0 K_i) \longrightarrow H^0 T(K_i),$$

再经平移得到

$$H^n T((H^{n_i} K_i)[-n_i]) \longrightarrow H^n T(K_i), \quad \sum_i n_i = n. \quad (1.3.20.4)$$

若 T 为 t -正合, 则 (1.3.20.3)、(1.3.20.4) 同时存在。对每个 i , 有可交换图

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq n_i} K_i & \longrightarrow & H^{n_i} K_i[-n_i] \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_i & \longrightarrow & \tau_{\geq n_i} K_i \end{array}$$

对这些图应用 $H^n T$, 可知先作 (1.3.20.4)、再作 (1.3.20.3) 的复合为恒等。若

$$\sum_i n_i = \sum_i m_i = n, \quad (n_i)_{i \in I} \neq (m_i)_{i \in I},$$

则存在 i 使 $n_i < m_i$ 。复合

$$\tau_{\leq n_i} K_i \longrightarrow K_i \longrightarrow \tau_{\geq m_i} K_i$$

为零, 因此, 与 (n_i) 对应的 (1.3.20.4) 再接与 (m_i) 对应的 (1.3.20.3), 所得复合也为零。

命题 1.3.21. 若 T 为 t -正合, 且每个 $K_i \in D_i^b$, 则 (1.3.20.3)、(1.3.20.4) 定义互逆同构

$$H^n T(K_i) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sum_i n_i = n} H^n T((H^{n_i} K_i)[-n_i]). \quad (1.3.21.1)$$

证明. 上文已证明这些态射把右端实现为左端的一个直和因子。(1.3.21.1) 两端对每个 K_i 都是上同调函子; 右端之所以如此, 是因为 pT 正合, 而 (1.3.20.3)、(1.3.20.4) 是上同调函子之间的态射。通过剥离, 可化归到每个 K_i 都属于 C_i 的情形; 此时结论显然。□

例 1.3.22. 以下 t -结构的例子在本书后文不再使用。

设 $\mathcal{A}$ 是 1.1.4 中的正合范畴, 其指定短正合列族为 E 。假设每个态射 $f: A \rightarrow B$ 都有核, 并且 $\ker(f) \rightarrow A$ 出现在短正合列

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow A \longrightarrow \operatorname{Coim}(f) \longrightarrow 0$$

中。令 $D^{\leq 0}$ (相应地, $D^{\geq 0}$) 为

$$D := D(\mathcal{A})$$

中由下列复形 K 组成的子范畴: 对 $i > 0$ (相应地, $i < 0$), 态射

$$\mathrm{Coim}(d^{i-1}) \longrightarrow \ker(d^i)$$

均为同构。用 1.1.4 的嵌入

$$h : \mathcal{A} \longrightarrow \widetilde{(\mathcal{A}, E)}$$

来表述, 这就是说 K 的像 h_K 属于 $D^{\leq 0}$ (相应地, $D^{\geq 0}$)。于是 $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ 是 D 上的一个 t -结构。

证明. (a) 对 $K, L \in D$,

$$\mathrm{Hom}_D(K, L) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(K', L'),$$

其中极限取遍拟同构 $K' \rightarrow K$ 与 $L \rightarrow L'$ 的同伦类。若 $K \in D^{\leq 0}$ (相应地, $L \in D^{\geq 1}$), 则可取余终系统, 使 $K'^i = 0$ 对 $i > 0$ (相应地, $L'^i = 0$ 对 $i < 0$)。为此使用拟同构

$$\tau_{\leq 0} K' \longrightarrow K', \quad L' \longrightarrow \tau_{\geq 1} L',$$

这里的 $\tau_{\leq 0}, \tau_{\geq 1}$ 是 1.3.2(i) 中的截断。

对这样的 K', L' , 任意复形态射 $f : K' \rightarrow L'$ 都为零: 它只可能由

$$f^0 : K'^0 \longrightarrow L'^0$$

给出, 并满足 $df^0 = 0$; 而 $d : L'^0 \rightarrow L'^1$ 是单态射, 故 $f^0 = 0$ 。这验证了 1.3.1(i); 公理 1.3.1(ii) 显然。

(b) 对 $K \in K(\mathcal{A})$, 有复形短正合列

$$0 \longrightarrow \tau_{\leq 0} K \longrightarrow K \longrightarrow \tau_{\geq 1} K \longrightarrow 0.$$

它在 $D(\mathcal{A})$ 中定义好三角: $\tau_{\leq 0} K \rightarrow K$ 的锥拟同构于 $\tau_{\geq 1} K$ 。这验证了 1.3.1(iii)。

特别地, D 的心 C 是阿贝尔范畴。 C 的对象可由长度为 1 的复形

$$K^{-1} \xrightarrow{d} K^0$$

表示, 其中 d 为单态射。对两个这样的复形 K, L , 复形态射 $f : K \rightarrow L$ 由其分量

$$f^0 : K^0 \longrightarrow L^0$$

唯一决定。把 K^{-1}, L^{-1} 分别看成 K^0, L^0 的子对象后, f^0 来自某个复形态射, 当且仅当

$$f^0(K^{-1}) \subset L^{-1};$$

而 f 零同伦, 当且仅当

$$f^0(K^0) \subset L^{-1}.$$

f 为拟同构, 当且仅当²⁴

$$0 \longrightarrow K^{-1} \longrightarrow K^0 \oplus L^{-1} \longrightarrow L^0 \longrightarrow 0$$

正合; 也就是说, $K^0 \oplus L^{-1} \rightarrow L^0$ 是可容许满态射, 而 $K^{-1} \subset K^0$ 是 $L^{-1} \subset L^0$ 沿 f^0 的拉回。

容易验证: 若 $\varphi: K' \rightarrow K$ 是上述类型的拟同构, 且 $f\varphi$ 零同伦, 则 f 也零同伦。因此

$$\mathrm{Hom}_C(K, L) = \varinjlim_{\varphi: K' \xrightarrow{\sim} K} \frac{\{f: K'^0 \rightarrow L^0 \mid f(K'^{-1}) \subset L^{-1}\}}{\{f \mid f(K'^0) \subset L^{-1}\}},$$

其中 φ 遍历上述类型的拟同构; 这个归纳系统中的过渡映射均为单态射。□

习题 1.3.23.

(i) 对 $\mathcal{A}$ 中对象组成的复形 K , $H^0 K \in C$ 是复形

$$\mathrm{Coim}(d^{-1}) \longrightarrow \ker(d^0).$$

(ii) 设 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{N}$ 是到阿贝尔范畴 $\mathcal{N}$ 的函子, 并把 E 中的序列变为右正合列

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0.$$

证明: F 在唯一同构意义下唯一地延拓 (*extension*; 法: *prolongement*) 为右正合函子 $F': C \rightarrow \mathcal{N}$ 。若 F 全忠实, 把 E 中的序列变为短正合列, 并把单态射变为单态射, 则 F' 正合且全忠实。特别地, 复合函子

$$C \longrightarrow D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\widetilde{(\mathcal{A}, E)}) \xrightarrow{H^0} \widetilde{(\mathcal{A}, E)}$$

全忠实; 它把 C 等同于 $\widetilde{(\mathcal{A}, E)}$ 中如下商对象所成的范畴: $\mathcal{A}$ 的一个对象模去仍属于 $\mathcal{A}$ 的一个子对象。

(iii) 证明函子

$$D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(C)$$

是等价。(利用 C 的每个对象都是 $\mathcal{A}$ 中某对象的商这一事实。)

(iv) 设 $\mathcal{A}$ 为阿贝尔范畴。1.3.22 的假设适用于 $F(\mathcal{A})$ (1.1.3, 例 2)²⁵。令 C 为相应的滤过对象之形式商所成的阿贝尔范畴, C' 为序列

$$\cdots \longrightarrow A_i \longrightarrow A_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

所成的范畴, 其中 $i \gg 0$ 时 $A_i = 0$, 而 $i \ll 0$ 时 $A_i \rightarrow A_{i-1}$ 为同构。证明函子

$$((V^{-1}, F) \longrightarrow (V^0, F)) \longmapsto (\mathrm{coker}(F^i V^{-1} \longrightarrow F^i V^0))_i$$

给出 $C \xrightarrow{\sim} C'$ 。(应用 (ii)。)

²⁴据勘误第 15 条修正。

²⁵译者注: 此处照录原文引用; 滤过对象范畴的例子实际在 1.1.4, 例 1。

例 1.3.24. 若把 *Banach* 空间范畴 $\mathcal{A}$ 的短正合列取为忘掉拓扑后正合的序列, 则 1.3.22 的假设成立。由闭图定理, 这样的序列同构于

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

其中 A 是 B 的闭子空间, $C = B/A$ 。

所得范畴 $\mathcal{C}$ 可看成“形式商” B/A 所成的范畴; 这里 $A \rightarrow B$ 是 *Banach* 空间之间的连续线性单射, 不要求像闭。闭图定理保证: 若复形

$$K^{-1} \longrightarrow K^0, \quad L^{-1} \longrightarrow L^0$$

定义 $\mathcal{C}$ 的对象, 则复形态射 $f: K \rightarrow L$ 等同于连续线性映射 $f^0: K^0 \rightarrow L^0$, 满足集合意义下

$$f^0(K^{-1}) \subset L^{-1}.$$

而 f 零同伦, 也就是在 $\mathcal{C}$ 中为零, 当且仅当集合意义下

$$f^0(K^0) \subset L^{-1}.$$

L. Waelbroeck 曾研究过与这些形式商相近的对象 [Wae72]。²⁶

1.4 粘合

1.4.1

设拓扑空间 X (更一般地, 一个拓扑斯 (*topos*; 法: *topos*)) 带有环层 $\mathcal{O}$ 。记

$$D(X, \mathcal{O})$$

为 X 上左 $\mathcal{O}$ -模层所成阿贝尔范畴

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{O})$$

的导出范畴。照例, D^+ 表示其中由下有界复形的本质像组成的全子范畴。

设 $U \subset X$ 为开集, $F = X \setminus U$ 为其闭补集, $j: U \hookrightarrow X$ 、 $i: F \hookrightarrow X$ 为包含映射; $\mathcal{O}$ 在 U 或 F 上的逆像仍记作 $\mathcal{O}$ 。我们将说明: 怎样把 $D^+(U, \mathcal{O})$ 与 $D^+(F, \mathcal{O})$ 上的 t -结构粘合 (*gluing*; 法: *recollement*) 成 $D^+(X, \mathcal{O})$ 上的 t -结构。

三个范畴 $\mathcal{M}(X, \mathcal{O})$ 、 $\mathcal{M}(U, \mathcal{O})$ 、 $\mathcal{M}(F, \mathcal{O})$ 由下列函子联系:

$j_! : \mathcal{M}(U, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{O}),$	零延拓 (正合);
$j^* : \mathcal{M}(X, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}(U, \mathcal{O}),$	限制 (正合), 也记作 $j^!$;
$j_* : \mathcal{M}(U, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{O}),$	直接像 (左正合);
$i^* : \mathcal{M}(X, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}(F, \mathcal{O}),$	限制 (正合);
$i_* : \mathcal{M}(F, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{O}),$	直接像 (正合), 也记作 $i_!$;
$i^! : \mathcal{M}(X, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}(F, \mathcal{O}),$	支集在 F 中的截面 (左正合)。

²⁶据勘误第 16 条修正。

它们组成两组三重伴随函子

$$(j_!, j^! = j^*, j_*), \quad (i^*, i_* = i_!, i^!).$$

有 $j^*i_* = 0$, 故由伴随性又有

$$i^*j_! = 0, \quad i^!j_* = 0.$$

对 X 上任意层 $\mathcal{F}$, 伴随态射给出正合列

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow j_!j^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{F} \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow i_*i^!\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_*j^*\mathcal{F}. \end{cases} \quad (1.4.1.1)$$

若 $\mathcal{F}$ 为内射层, 第二列右端还可补上 0. 对 F 上的层 (相应地, U 上的层), 得到同构

$$i^*i_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} i^!i_*\mathcal{F}, \quad (1.4.1.2)$$

以及

$$j^*j_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j^*j_!\mathcal{F}. \quad (1.4.1.3)$$

一般地, 对伴随对 (T^*, T_*) , 伴随态射 $T^*T_* \rightarrow \text{Id}$ (相应地, $\text{Id} \rightarrow T_*T^*$) 为同构, 当且仅当 T_* (相应地, T^*) 全忠实. 因此, (1.4.1.2)、(1.4.1.3) 等价于 i_* 、 j_* 、 $j_!$ 全忠实.

1.4.2

(1.4.2.0) 阿贝尔范畴之间的正合函子自然诱导出范畴之间的函子. 通常仍用同一符号表示原函子及其导出延拓; 这个延拓同时是左导出函子与右导出函子.

(1.4.2.1) 对 1.4.1 中的函子取右导出函子, 得到两组三重伴随函子.

它们联系 $D^+(X, \mathcal{O})$ 、 $D^+(U, \mathcal{O})$ 与 $D^+(F, \mathcal{O})$:

$$(j_!, j^*, Rj_*), \quad (i^*, i_*, Ri^!).$$

有

$$j^*i_* = 0, \quad i^*j_! = 0, \quad Ri^!Rj_* = 0.$$

对 $K \in K^+(X, \mathcal{O})$, (1.4.1.1) 导出好三角

$$(j_!j^*K, K, i_*i^*K), \quad (i_*Ri^!K, K, Rj_*j^*K).$$

对 $K \in D^+(F, \mathcal{O})$, (1.4.1.2) 给出

$$i^*i_*K \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow{\sim} Ri^!i_*K;$$

因此 i_* 全忠实. 相应地, 对 $K \in D^+(U, \mathcal{O})$, (1.4.1.3) 给出

$$j^*Rj_*K \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow{\sim} j^*j_!K;$$

因此 $j_!$ 与 Rj_* 全忠实. 事实上, j_* 与 i_* 都把内射对象变为内射对象.

(1.4.2.3) 粘合 t -结构所需的只是上文列出的性质. 它们还会在其他情形出现, 例如严格说来不属于 1.4.1 框架的 ℓ -进导出范畴. 为涵盖这些情形, 1.4.3 改在更一般的框架下讨论: 层范畴不再出现, 只保留三角范畴. 记号也随之简化, 把上面的 Rj_* 、 $Ri^!$ 分别写作 j_* 、 $i^!$.

1.4.3

设 D, D_U, D_F 为三个三角范畴，并给定正合函子²⁷

$$D_F \xrightarrow{i_*} D \xrightarrow{j^*} D_U.$$

有时也记 $i_! := i_*$ 、 $j^! := j^*$ 。假设满足下列条件。

(1.4.3.1) i_* 有正合的左、右伴随，分别记作 i^* 、 $i^!$ 。

(1.4.3.2) j^* 有正合的左、右伴随，分别记作 $j_!$ 、 j_* 。²⁸

(1.4.3.3) 有 $j^*i_* = 0$ 。由伴随性，

$$i^*j_! = 0, \quad i^!j_* = 0;$$

并且对 $A \in D_F$ 、 $B \in D_U$ ，

$$\mathrm{Hom}(j_!B, i_*A) = 0, \quad \mathrm{Hom}(i_*A, j_*B) = 0.$$

(1.4.3.4) 对每个 $K \in D$ ，存在态射

$$d : i_*i^*K \longrightarrow j_!j^*K[1]$$

(相应地， $d : j_*j^*K \rightarrow i_*i^!K[1]$)；由 (1.4.3.3) 与 1.1.10，它唯一，并使

$$j_!j^*K \longrightarrow K \longrightarrow i_*i^*K \xrightarrow{d} j_!j^*K[1]$$

(相应地，

$$i_*i^!K \longrightarrow K \longrightarrow j_*j^*K \xrightarrow{d} i_*i^!K[1]$$

) 成为好三角。

(1.4.3.5) i_* 、 $j_!$ 、 j_* 全忠实²⁹；也就是说，伴随态射

$$i^*i_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} i^!i_*, \quad j^*j_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} j^*j_!$$

均为同构。

这一形式体系自对偶：对偶性互换 $j_!$ 与 j_* ，也互换 i^* 与 $i^!$ 。

1.4.4

设 T 为三角范畴， $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ 是其中两个在平移 $X \mapsto X[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$) 下稳定的严格全子范畴。假设任取 $U \in \mathcal{U}$ 、 $V \in \mathcal{V}$ 都有

$$\mathrm{Hom}(U, V) = 0,$$

²⁷ 据勘误第 17 条修正。

²⁸ 据勘误第 18 条修正。

²⁹ 据勘误第 19 条修正。

且每个 $X \in T$ 都出现在某个好三角 (U, X, V) 中, 其中 $U \in \mathcal{U}$ 、 $V \in \mathcal{V}$ 。于是 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是 T 上的一个 t -结构。

由 1.3.4, $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的右正交, $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$ 的左正交。特别地, $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 都是厚子范畴 ([10] 6.2, p. 24)。[10] 6.4, p. 25 的条件 (i)、(ii) 成立; 由 [10], pp. 23–26, 投影

$$T \longrightarrow T/\mathcal{U}$$

有全忠实的右伴随, 其像为 $\mathcal{V}$; 投影 $T \rightarrow T/\mathcal{V}$ 有全忠实的左伴随, 其像为 $\mathcal{U}$ 。换言之, 包含函子

$$u: \mathcal{U} \hookrightarrow T, \quad v: \mathcal{V} \hookrightarrow T$$

分别有右伴随 u' 与左伴随 v' , 而序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{U} \xrightarrow{u} T \xrightarrow{v'} \mathcal{V} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathcal{V} \xrightarrow{v} T \xrightarrow{u'} \mathcal{U} \longrightarrow 0$$

是“正合”的: v' (相应地, u') 把 $\mathcal{V}$ (相应地, $\mathcal{U}$) 等同于 T 对厚子范畴 $\mathcal{U}$ (相应地, $\mathcal{V}$) 的商。

取 $T = D$, 并分别取

$$(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (i_* D_F, j_* D_U), \quad (\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (j_! D_U, i_* D_F),$$

便得到下述命题。

命题 1.4.5. 下列序列在上述意义下“正合”:

$$0 \longleftarrow D_F \xleftarrow{i^*} D \xleftarrow{j_!} D_U \longleftarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow D_F \xrightarrow{i_*} D \xrightarrow{j^*} D_U \longrightarrow 0,$$

$$0 \longleftarrow D_F \xleftarrow{i^!} D \xleftarrow{j^*} D_U \longleftarrow 0.$$

1.4.6

a) 由于 i_* 全忠实, 两个伴随态射的复合

$$i_* i^! \longrightarrow \text{Id} \longrightarrow i_* i^*$$

是唯一一个函子态射经 i_* 得到的:

$$i^! \longrightarrow i^*. \quad (1.4.6.1)$$

把它作用于 $i_* X$, 并将 $i^! i_* X$ 与 $i^* i_* X$ 都等同于 X , 所得自同构就是 X 的恒等态射。

b)³⁰ 函子 j^* 是商函子: 通过分式演算, 它把 D_U 等同于由 D 得到的商范畴。因此, 伴随态射的复合

$$j_! j^* \longrightarrow \text{Id} \longrightarrow j_* j^*$$

³⁰据勘误第 20 条修正。

来自唯一的一个函子态射

$$j_! \longrightarrow j_*. \quad (1.4.6.2)$$

将 $j^*j_!$ 与 j^*j_* 都等同于恒等函子后, (1.4.6.2) 经 j^* 所得的自同构就是恒等自同构。

c) 对 $X \in D_U$, 态射 $j_!X \rightarrow j_*X$ 的锥被 j^* 化为零, 因而属于 i_*D_F 。由 (1.4.3.3) 与 1.1.10, 以 $j_!X \rightarrow j_*X$ 为底的好三角在唯一同构意义下唯一。于是得到函子

$$j_*/j_! : D_U \longrightarrow D_F$$

以及函子性的好三角

$$(j_!, j_*, i_*(j_*/j_!)). \quad (1.4.6.3)$$

对偶构造给出函子 $T : D_U \rightarrow D_F$, 由函子性好三角

$$(i_*T, j_!, j_*)$$

刻画。将 (1.4.6.3) 旋转可得同构

$$T = (j_*/j_!)[-1],$$

在这个同构下, 态射 $i_*T \rightarrow j_!$ 是 (1.4.6.3) 中次数为 1 的态射平移 $[-1]$ 所得。函子 $(j_*/j_!)$ 与 $(j_*/j_!)[-1]$ 由对偶性相互导出。

分别对 (1.4.6.3) 施行 i^* 与 $i^!$, 并利用 $i^*j_! = i^!j_* = 0$, 得到同构

$$i^*j_* \xrightarrow{\sim} j_*/j_! \xrightarrow{\sim} i^!j_![1]. \quad (1.4.6.4)$$

1.4.7

取 $X \in D$, 对伴随态射

$$j_!j^*X \longrightarrow X \longrightarrow j_*j^*X$$

应用公理 TR4。我们来说明: 所得八面体在唯一同构意义下唯一, 并且随 X 具有函子性。

a) 由 (1.4.3.3)、(1.4.3.4) 与 1.1.10, 存在唯一同构

$$A \xrightarrow{\sim} i_*i^*X,$$

它把 $X \rightarrow A$ 等同于伴随态射 $X \rightarrow i_*i^*X$, 从而把三角 $(j_!j^*X, X, A)$ 等同于 (1.4.3.4) 的好三角 $(j_!j^*X, X, i_*i^*X)$ 。

b) 对 j_*j^*X 作同样处理; 由于它经 j^* 后与 X 相同, 便将 B 唯一地等同于

$$i_*i^*j_*j^*X = i_*(j_*/j_!)j^*X$$

(用到 (1.4.6.4)), 且 $j_*j^*X \rightarrow B$ 就是伴随态射 $\text{Id} \rightarrow i_*i^*$ 。由 1.1.9, 存在唯一态射 $A \rightarrow B$ 使八面体上方的菱形交换; 在上述等同下, 它是由 $X \rightarrow j_*j^*X$ 的函子性诱导出的

$$i_*i^*X \longrightarrow i_*i^*j_*j^*X.$$

c) 对偶地, 存在唯一同构

$$C \xrightarrow{\sim} i_* i^! X[1],$$

它把三角 $(X, j_* j^* X, C)$ 中次数为 1 的态射等同于伴随态射 $i_* i^! X \rightarrow X$ 。换言之, 这个三角由 (1.4.3.4) 的三角 $(i_* i^! X, X, j_* j^* X)$ 旋转而来, 并将其中次数为 1 的箭头 $j_* j^* X \rightarrow i_* i^! X$ 变号。

态射 $B \rightarrow C$ 是使方块 $(B, C, j_! j^* X, X)$ 交换的唯一态射。借助 (1.4.6.4) 给出的 $j_*/j_! \simeq i^! j_![1]$, 它就是由 $j_! j^* X \rightarrow X$ 的函子性诱导出的态射

$$i_*(j_*/j_!)j^* X = i_* i^! j_! j^* X[1] \longrightarrow i_* i^! X[1].$$

d) 以上论证确定了八面体的全部顶点和箭头, 也证明了它的函子性。代入 A, B, C 的取值, 可将它写成

$$\begin{array}{ccccc}
 & & i_* i^* X & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & X & & i_*(j_*/j_!)j^* X & \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 j_! j^* X & \longrightarrow & j_* j^* X & \longrightarrow & i_* i^! X[1].
 \end{array} \quad (1.4.7.1)$$

由于 i_* 全忠实, 好三角

$$(i_* i^* X, i_*(j_*/j_!)j^* X, i_* i^! X[1])$$

是某个三角

$$(i^* X, (j_*/j_!)j^* X, i^! X[1])$$

经 i_* 所得; 由 1.3.19, 后一个三角自动是好三角。其次数为 1 的态射 d 经 i_* 后, 是复合

$$i_* i^! X[1] \longrightarrow X[1] \longrightarrow i_* i^* X[1],$$

故 d 正是 (1.4.6.1) 作用于 $X[1]$ 所得的态射, 也就是先作用于 X 再平移 $[1]$ 。旋转这个三角 (TR2), 改变新出现的次数为 1 的态射的符号, 再由 1.3.19 消去 i_* , 得到以 (1.4.6.1) 为底的函子性好三角

$$(i^!, i^*, (j_*/j_!)j^*). \quad (1.4.7.2)$$

在 1.4.1、1.4.2 的框架下, 这一三角源于如下事实: 任意松层 (*flabby sheaf*; 法: *faisceau flasque*) $\mathcal{F}$ 都有正合列

$$0 \longrightarrow i^! \mathcal{F} \longrightarrow i^* \mathcal{F} \longrightarrow i^* j_* j^* \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

注记 1.4.8. 由 [10] §2, 特别是 pp. 23–27, 公理 (1.4.3.1)–(1.4.3.5) 等价于以下说法: i_* 把 D_F 等同于 D 的一个厚子范畴, j^* 把 D_U 等同于 D/D_F , 并且 j^* 同时有左、右伴随。

1.4.9

仍假设 1.4.3 的条件成立。设

$$(D_U^{\leq 0}, D_U^{\geq 0}) \quad \text{与} \quad (D_F^{\leq 0}, D_F^{\geq 0})$$

分别是 D_U 与 D_F 上的 t -结构。定义

$$D^{\leq 0} := \{K \in D \mid j^*K \in D_U^{\leq 0}, i^*K \in D_F^{\leq 0}\},$$

$$D^{\geq 0} := \{K \in D \mid j^*K \in D_U^{\geq 0}, i^!K \in D_F^{\geq 0}\}.$$

定理 1.4.10. 在上述假设与记号下, $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ 是 D 上的一个 t -结构。

称这个 t -结构由 D_U 与 D_F 上的 t -结构粘合而得。下面验证 1.3.1 的公理 (i)、(ii)、(iii)。

证明. 公理 (i)。取 $X \in D^{\leq 0}$ 、 $Y \in D^{\geq 1}$ 。对 X 使用 (1.4.3.4) 的第一个三角, 得到正合列

$$\mathrm{Hom}(i_*i^*X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(j_!j^*X, Y).$$

由 D_F 上的公理 1.3.1 (i),

$$\mathrm{Hom}(i_*i^*X, Y) = \mathrm{Hom}(i^*X, i^!Y) = 0;$$

由 D_U 上的同一公理,

$$\mathrm{Hom}(j_!j^*X, Y) = \mathrm{Hom}(j^*X, j^*Y) = 0.$$

故结论成立。

公理 (ii)。这立即由 D_U 与 D_F 上的公理 1.3.1 (ii) 得到。

公理 (iii)。取 $X \in D$ 。依次选取 Y 与 A , 使

$$(Y, X, j_*\tau_{>0}j^*X), \quad (A, Y, i_*\tau_{>0}i^*Y)$$

为好三角, 再应用 TR4:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & i_*\tau_{>0}i^*Y & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & Y & & B & \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & j_*\tau_{>0}j^*X.
 \end{array}$$

结合 (1.4.3.3)–(1.4.3.5), 按下列方式把 $j^*, i^*, i^!$ 作用于这个八面体中的好三角:

$$j^*(i_*\tau_{>0}i^*Y, B, j_*\tau_{>0}j^*X) = (0, j^*B, \tau_{>0}j^*X),$$

$$j^*(A, X, B) = (j^*A, j^*X, \tau_{>0}j^*X),$$

$$i^*(A, Y, i_*\tau_{>0}i^*Y) = (i^*A, i^*Y, \tau_{>0}i^*Y),$$

$$i^!(i_*\tau_{>0}i^*Y, B, j_*\tau_{>0}j^*X) = (\tau_{>0}i^*Y, i^!B, 0).$$

因而分别得到同构

$$\begin{aligned} j^*B &\xrightarrow{\sim} \tau_{>0}j^*X, & j^*A &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0}j^*X, \\ i^*A &\xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0}i^*Y, & \tau_{>0}i^*Y &\xrightarrow{\sim} i^!B. \end{aligned}$$

于是 $A \in D^{\leq 0}$ 、 $B \in D^{\geq 1}$ ，而好三角 (A, X, B) 满足 1.3.1 (iii)。□

注记 1.4.11. 所得 t -结构非退化，当且仅当 D_U 与 D_F 上给定的两个 t -结构都非退化。

以下 1.4.10 的逆命题在本书后文中不会用到。

命题 1.4.12. 在 1.4.3 的假设与记号下，设 $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ 是 D 上的一个 t -结构。下列条件等价：

- (i) $j_!j^*$ 右 t -正合；
- (i') j_*j^* 左 t -正合；
- (ii) 这个 t -结构由粘合得到。

证明. (i) 与 (i') 的等价性来自 1.3.17 (iii)；它们又分别等价于 $(j^*D^{\leq 0}, j^*D^{\geq 0})$ 满足公理 1.3.1 (i)。好三角

$$(j_!j^*, \text{Id}, i_*i^*), \quad (i_*i^!, \text{Id}, j_*j^*)$$

分别说明：(i) 蕴含 i_*i^* 右 t -正合，(i') 蕴含 $i_*i^!$ 左 t -正合。这两个条件又由 1.3.17 (iii) 彼此等价，并且恰好意味着 $(i^*D^{\leq 0}, i^!D^{\geq 0})$ 满足公理 1.3.1 (i)。

显然，(ii) 蕴含 (i) 与 (i')。此时，被粘合的 t -结构在 D_U 上是

$$(j^*D^{\leq 0}, j^*D^{\geq 0}),$$

在 D_F 上则是 D 的 t -结构所诱导的结构

$$(D_F \cap D^{\leq 0}, D_F \cap D^{\geq 0}) = (i^*D^{\leq 0}, i^!D^{\geq 0}).$$

反过来，假设 (i)、(i') 成立。依次验证：

a) $(j^*D^{\leq 0}, j^*D^{\geq 0})$ 是 D_U 上的 t -结构。公理 1.3.1 (i) 已经验证，(ii) 显然；(iii) 则来自 j^* 的本质满 (*essentially surjective*；法： *essentiellement surjectif*) 性。

b) $(i^*D^{\leq 0}, i^!D^{\geq 0})$ 是 D_F 上的 t -结构。公理 1.3.1 (i) 已经验证，只有 (iii) 不是立即的。取 $X \in D_F$ 。由于 j^* 是 t -正合函子，

$$j^*\tau_{\leq 0}i_*X = \tau_{\leq 0}j^*i_*X = 0, \quad j^*\tau_{>0}i_*X = 0.$$

所以 $\tau_{\leq 0}i_*X$ 与 $\tau_{>0}i_*X$ 都属于 i_*D_F 。利用 i_* 的全忠实性，把它们分别写成 $i_*X_{\leq 0}$ 与 $i_*X_{>0}$ ，便由 D 中的截断三角得到 D_F 中的好三角

$$(X_{\leq 0}, X, X_{>0}),$$

它满足公理 1.3.1 (iii)。

c) 从带有原 t -结构的 D 到带有上述粘合 t -结构的 D ，恒等函子是 t -正合的。由 1.3.19，两者相同，故原 t -结构确由粘合得到。□

1.4.13

先只假设 D_F 上给定了一个 t -结构。给 D_U 配上退化 t -结构 $(D_U, 0)$, 再应用 1.4.10; 所得 D 上 t -结构的截断函子 $\tau_{\leq p}$ 记作

$$\tau_{\leq p}^F.$$

函子 $\tau_{\leq p}^F$ 是下述全子范畴的包含函子的右伴随: 该全子范畴由所有满足 $i^*X \in D_F^{\leq p}$ 的 $X \in D$ 组成。1.4.10 对公理 1.3.1 (iii) 的证明给出好三角

$$(\tau_{\leq p}^F X, X, i_* \tau_{> p} i^* X).$$

相对于这个 t -结构, 各上同调函子为

$$H^p X = i_* H^p i^* X.$$

对偶地, 给 D_U 配上退化 t -结构 $(0, D_U)$, 定义 $\tau_{\geq p}^F$ 。它是全子范畴

$$(i^!)^{-1}(D_F^{\geq p}) \subset D$$

的包含函子的左伴随, 并有好三角

$$(i_* \tau_{< p} i^! X, X, \tau_{\geq p}^F X).$$

相应的上同调函子为

$$H^p X = i_* H^p i^! X.$$

同理, 如果只假设 D_U 上给定了一个 t -结构, 而分别给 D_F 配上退化 t -结构 $(D_F, 0)$ 与 $(0, D_F)$, 便在 D 上得到两个 t -结构; 其截断函子分别记作

$$\tau_{\leq p}^U, \quad \tau_{\geq p}^U.$$

它们给出好三角

$$(\tau_{\leq p}^U X, X, j_* \tau_{> p} j^* X), \quad (j_! \tau_{< p} j^* X, X, \tau_{\geq p}^U X),$$

相应的 $H^p X$ 分别为

$$j_* H^p j^* X, \quad j_! H^p j^* X.$$

1.4.10 对公理 (iii) 的证明表明 $\tau_{\leq 0} = \tau_{\leq 0}^F \tau_{\leq 0}^U$ 。平移并对偶, 得到

$$\tau_{\leq p} = \tau_{\leq p}^F \tau_{\leq p}^U, \quad \tau_{\geq p} = \tau_{\geq p}^F \tau_{\geq p}^U. \quad (1.4.13.1)$$

回到 1.4.1 的情形, 并在 $D^+(F, \mathcal{O})$ 上取自然 t -结构。此时, $\tau_{\leq p}^F$ 由复形范畴上的如下函子诱导: 它把层复形 K 送到一个子复形; 这个子复形在 U 上与 K 相同, 在 F 上则与 1.3.2 的子复形 $\tau_{\leq p} K$ 相同。

称 D 中的对象 X 是 D_U 中对象 Y 的一个延拓, 如果给定了同构

$$j^* X \xrightarrow{\sim} Y.$$

由伴随性, 这个同构给出态射

$$j_! Y \longrightarrow X \longrightarrow j_* Y.$$

若延拓 X 作为延拓同构于 $\tau_{\geq p}^F j_! Y$ (相应地, $\tau_{\leq p}^F j_* Y$), 则该同构唯一; 此后便简写为

$$X = \tau_{\geq p}^F j_! Y \quad (\text{相应地 } X = \tau_{\leq p}^F j_* Y).$$

命题 1.4.14. 设 $Y \in D_U$, $p \in \mathbb{Z}$. 在唯一同构意义下, 恰有一个 Y 的延拓 X 满足

$$i^* X \in D_F^{\leq p-1}, \quad i^! X \in D_F^{\geq p+1}.$$

它就是 $\tau_{\leq p-1}^F j_* Y$, 并且

$$\tau_{\leq p-1}^F j_* Y = \tau_{\geq p+1}^F j_! Y.$$

证明. 设 X 是 Y 的一个延拓. 把 (1.4.7.2) 旋转所得的好三角

$$(i^* X, (j_*/j_!) Y, i^! X[1])$$

表明, 下列条件等价:

(a) $i^* X \in D_F^{\leq p-1}$ 且 $i^! X \in D_F^{\geq p+1}$;

(b) $i^! X[1]$ 是

$$(j_*/j_!) Y = i^* j_* Y$$

的 $\tau_{\geq p}$;

(b') $i^* X$ 是 $(j_*/j_!) Y$ 的 $\tau_{\leq p-1}$.

由 (1.4.7.1) 得到的好三角

$$(X, j_* Y, i_* i^! X[1])$$

说明, (b) 等价于 $X = \tau_{\leq p-1}^F j_* Y$. 对偶地, (b') 等价于 $X = \tau_{\geq p+1}^F j_! Y$. 命题得证. $\square$

注记 1.4.14.1. 设 D_m 是 D 中由满足

$$i^* X \in D_F^{\leq p-1}, \quad i^! X \in D_F^{\geq p+1}$$

的对象 X 组成的全子范畴. 函子 j^* 诱导范畴等价

$$D_m \xrightarrow{\sim} D_U;$$

事实上, 它以 $\tau_{\leq p-1}^F j_*$ 为拟逆. 这个拟逆有时记作

$${}^p j_{!*}.$$

1.4.15

设 $\mathcal{C}, \mathcal{C}_U, \mathcal{C}_F$ 分别是 t -范畴 D, D_U, D_F 的心; D_U, D_F 配备给定的 t -结构, D 配备 1.4.10 的粘合 t -结构。以 ε 表示 $\mathcal{C}, \mathcal{C}_U, \mathcal{C}_F$ 到相应三角范畴的包含函子。若 T 是

$$j_!, j^*, j_*, i^*, i_*, i^!$$

之一, 记

$${}^pT := H^0 \circ T \circ \varepsilon.$$

由 D 上 t -结构的定义, j^* 是 t -正合的, i^* 右 t -正合, 而 $i^!$ 左 t -正合。应用 1.3.17 (iii), 得到:

命题 1.4.16.

(i) $j_!$ 与 i^* 右 t -正合; j^* 与 i_* 是 t -正合的; j_* 与 $i^!$ 左 t -正合。

(ii)

$$({}^pj_!, {}^pj^*, {}^pj_*), \quad ({}^pi^*, {}^pi_*, {}^pi^!)$$

是两组三重伴随函子。

命题 1.4.17.

(i) 下列复合函子为零:

$${}^pj^* {}^pi_*, \quad {}^pi^* {}^pj_!, \quad {}^pi^! {}^pj_*.$$

对 $A \in \mathcal{C}_F, B \in \mathcal{C}_U$,

$$\mathrm{Hom}({}^pj_! B, {}^pi_* A) = \mathrm{Hom}({}^pi_* A, {}^pj_* B) = 0.$$

(ii) 对任意 $A \in \mathcal{C}$, 下列两序列正合:

$${}^pj_! {}^pj^* A \longrightarrow A \longrightarrow {}^pi_* {}^pi^* A \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow {}^pi_* {}^pi^! A \longrightarrow A \longrightarrow {}^pj_* {}^pj^* A.$$

(iii) 函子 ${}^pi_*, {}^pj_!, {}^pj_*$ 全忠实; 伴随态射

$${}^pi^* {}^pi_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} {}^pi^! {}^pi_*,$$

$${}^pj^* {}^pj_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} {}^pj^* {}^pj_!$$

都是同构。

这些断言分别来自 (1.4.3.3)、(1.4.3.4)、(1.4.3.5)。验证留给读者, 可使用 1.3.17 (iv)。

补充 1.4.17.1. 由 (i) 中 ${}^pj^* {}^pi_* = 0$ 以及 (ii) 的任一正合列可知: $X \in \mathcal{C}$ 属于 pi_* 的本质像 $\overline{\mathcal{C}}_F$, 当且仅当

$${}^pj^* X = 0.$$

由于 ${}^p j^*$ 正合, $\overline{\mathcal{C}}_F$ 是 $\mathcal{C}$ 的厚子范畴, 也就是说, 它对扩张与子商稳定. 把 $\mathcal{C}_F$ 等同于 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\overline{\mathcal{C}}_F$ 后, 伴随对

$$({}^p i^*, {}^p i_*), \quad ({}^p i_*, {}^p i^!)$$

说明: 对 $X \in \mathcal{C}$, ${}^p i^* X$ 是 X 属于 $\mathcal{C}_F$ 的最大商对象, ${}^p i^! X$ 是 X 属于 $\mathcal{C}_F$ 的最大子对象.

命题 1.4.18. 函子 ${}^p j^*$ 把 $\mathcal{C}_U$ 等同于 $\mathcal{C}$ 对厚子范畴 $\mathcal{C}_F$ 的商; 更准确地说, 是对 $\overline{\mathcal{C}}_F$ 的商, 参见 1.4.17.1.

证明. 设

$$Q: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{C}_F$$

为商函子. 正合函子 ${}^p j^*$ 可分解为 $T \circ Q$. 函子 T 是忠实的: 若 $f \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_F$ 来自 $f_1 \in \mathcal{C}$, 且 $T(f) = 0$, 则 ${}^p j^*(f_1) = 0$, 也就是说 $\text{Im}(f_1)$ 属于 $\mathcal{C}_F$ 的像, 故 $Q(f_1) = 0$.

又因

$$\text{Id} \xrightarrow{\sim} {}^p j^* {}^p j_! = T \circ Q \circ {}^p j_!,$$

T 在对象同构类上是满的. 只须再证 T 全忠实, 便得到范畴等价; 这一点用下述引理完成. $\square$

引理 1.4.19. 对任意 $A \in \mathcal{C}$, 下列序列正合:

$$0 \longrightarrow {}^p i_* H^{-1} i^* A \longrightarrow {}^p j_! {}^p j^* A \longrightarrow A \longrightarrow {}^p i_* {}^p i^* A \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow {}^p i_* {}^p i^! A \longrightarrow A \longrightarrow {}^p j_* {}^p j^* A \longrightarrow {}^p i_* H^1 i^! A \longrightarrow 0.$$

这由 (1.4.3.4) 与 1.4.16 (i) 立即得到.

现在完成 1.4.18 的证明. 由 1.4.19, 态射

$${}^p j_! {}^p j^* A \longrightarrow A$$

的核与余核都在 ${}^p i_*$ 的像中. 因此, $\mathcal{C}/{}^p i_* \mathcal{C}_F$ 的每个对象都有一个属于 ${}^p j_!$ 之像的代表. 对像中的对象 ${}^p j_! X$ 与 ${}^p j_! Y$, 映射

$$T: \text{Hom}(Q^p j_! X, Q^p j_! Y) \longrightarrow \text{Hom}(TQ^p j_! X, TQ^p j_! Y) = \text{Hom}(X, Y)$$

以 $Q^p j_!$ 为截面, 因而是满射. 结合上面已证的忠实性, T 全忠实, 命题得证.

警告 1.4.20. 在 1.4.1 的假设下, 若给 $D^+(U, \mathcal{O})$ 与 $D^+(F, \mathcal{O})$ 配上其自然 t -结构 (1.3.2 (i)), 则 $D^+(X, \mathcal{O})$ 上所得的粘合 t -结构就是自然 t -结构, 而阿贝尔范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{C}_U, \mathcal{C}_F$ 分别为

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{O}), \quad \mathcal{M}(U, \mathcal{O}), \quad \mathcal{M}(F, \mathcal{O}).$$

不过, 一般而言, ${}^p j_!$ 只是右正合而非正合, ${}^p i^*$ 只是左正合而非正合³¹; 1.4.17 (ii) 的第一条序列在左端也不正合. 1.4.3 的形式体系是自对偶的, 因此, 1.4.1 中成立的公式, 只有在其对偶公式也成立时, 才可能普遍成立.

³¹译者注: 原文此处写作 ${}^p i^*$ 且称其左正合. 由 1.4.16 与 1.3.17(i), ${}^p i^*$ 应为右正合; 左正合的是 ${}^p i^!$. 此处保留原文表述.

1.4.21

回到 1.4.6 的论证。

a) 由于 p_{i_*} 全忠实，伴随态射的复合

$$p_{i_*} p_{i!} \longrightarrow \text{Id} \longrightarrow p_{i_*} p_{i^*}$$

是唯一一个函子态射经 p_{i_*} 得到的：

$$p_{i!} \longrightarrow p_{i^*}. \quad (1.4.21.1)$$

对伴随对 (i^*, i_*) 、 $(i_*, i!)$ 使用 1.3.18 (ii)，再利用 i_* 的 t -正合性，对 $A \in \mathcal{C}$ 得到交换图

$$\begin{array}{ccccc} p_{i_*} p_{i!} A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & p_{i_*} p_{i^*} A \\ \sim \downarrow & & \parallel & & \downarrow \sim \\ i_* p_{i!} A & & A & & i_* p_{i^*} A \\ \downarrow & & \parallel & & \uparrow \\ i_* i! A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & i_* i^* A. \end{array}$$

由此可见，(1.4.21.1) 作用于 A 后就是复合

$$p_{i!} A \longrightarrow i! A \xrightarrow{(1.4.6.1)} i^* A \longrightarrow p_{i^*} A. \quad (1.4.21.2)$$

把 (1.4.21.1) 作用于 $i_* A$ ($A \in \mathcal{C}_F$)，所得自同构为 A 的恒等态射。

b)³² 由于 p_{j^*} 是商函子 (1.4.18)，伴随态射的复合

$$p_{j!} p_{j^*} \longrightarrow \text{Id} \longrightarrow p_{j_*} p_{j^*}$$

来自唯一一个函子态射

$$p_{j!} \longrightarrow p_{j_*}. \quad (1.4.21.3)$$

对伴随对 $(j!, j^*)$ 、 (j^*, j_*) 使用 1.3.18 (ii)，并利用 j^* 的 t -正合性，对 $A \in \mathcal{C}$ 得到交换图

$$\begin{array}{ccccc} p_{j!} p_{j^*} A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & p_{j_*} p_{j^*} A \\ \sim \downarrow & & \parallel & & \downarrow \sim \\ p_{j!} j^* A & & A & & p_{j_*} j^* A \\ \uparrow & & \parallel & & \downarrow \\ j! j^* A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & j_* j^* A. \end{array}$$

所以对 $B \in \mathcal{C}_U$ ，(1.4.6.2) 作用于 B 后就是复合

$$j! B \longrightarrow \tau_{\geq 0} j! B = p_{j!} B \xrightarrow{(1.4.21.3)} p_{j_*} B = \tau_{\leq 0} j_* B \longrightarrow j_* B. \quad (1.4.21.4)$$

把 p_{j^*} 作用于 (1.4.21.3)，所得是恒等函子的恒等自同构。特别地，对 $B \in \mathcal{C}_U$ ，态射 $p_{j!} B \rightarrow p_{j_*} B$ 的核与余核都属于 $p_{i_*} \mathcal{C}_F$ 。

³²据勘误第 21 条修正。

定义 1.4.22. 函子

$$j_{!*} : \mathcal{C}_U \longrightarrow \mathcal{C}$$

把 $B \in \mathcal{C}_U$ 送到 ${}^p j_! B$ 在 ${}^p j_* B$ 中的像。

对 $B \in \mathcal{C}_U$, (1.4.21.4) 给出 (1.4.6.2) 作用于 B 后的分解

$$j_! B \longrightarrow {}^p j_! B \longrightarrow j_{!*} B \longrightarrow {}^p j_* B \longrightarrow j_* B. \quad (1.4.22.1)$$

命题 1.4.23. 对 $B \in \mathcal{C}_U$, 有

$${}^p j_! B = \tau_{\geq 0}^F j_! B = \tau_{\leq -2}^F j_* B,$$

$$j_{!*} B = \tau_{\geq 1}^F j_! B = \tau_{\leq -1}^F j_* B,$$

$${}^p j_* B = \tau_{\geq 2}^F j_! B = \tau_{\leq 0}^F j_* B.$$

更准确地说, ${}^p j_! B$ 连同态射 $j_! B \rightarrow {}^p j_! B$, 正是 $\tau_{\geq 0}^F j_! B$; 其余等式也作同样理解。

证明. 由于 $j^* j_! B \in \mathcal{C}_U$, $j_! B$ 就是它自身的 $\tau_{\geq 0}^U$. 由 (1.4.13.1),

$${}^p j_! B = \tau_{\geq 0} j_! B = \tau_{\geq 0}^F j_! B;$$

再由 1.4.14,

$$\tau_{\geq 0}^F j_! B = \tau_{\leq -2}^F j_* B.$$

同理可得关于 ${}^p j_* B$ 的等式。

1.4.13 对 $\tau_{\geq p}^F$ 的上同调描述给出好三角

$$(i_* H^0 i^! j_! B, \tau_{\geq 0}^F j_! B, \tau_{\geq 1}^F j_! B).$$

它说明 $\tau_{\geq 1}^F j_! B \in D^{[-1,0]}$. 对偶论证给出好三角³³

$$(\tau_{\leq -1}^F j_* B, \tau_{\leq 0}^F j_* B, i_* H^0 i^* j_* B),$$

并说明 $\tau_{\leq -1}^F j_* B \in D^{[0,1]}$. 应用 1.4.14, 得到

$$\tau_{\geq 1}^F j_! B = \tau_{\leq -1}^F j_* B \in \mathcal{C}.$$

上述两个三角于是化为短正合列

$$0 \longrightarrow i_* H^0 i^! j_! B \longrightarrow {}^p j_! B \longrightarrow \tau_{\geq 1}^F j_! B \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \tau_{\leq -1}^F j_* B \longrightarrow {}^p j_* B \longrightarrow i_* H^0 i^* j_* B \longrightarrow 0.$$

它们说明, 这个共同对象正是 ${}^p j_! B$ 在 ${}^p j_* B$ 中的像, 即 $j_{!*} B$. □

推论 1.4.24. 对 $B \in \mathcal{C}_U$, $j_{!*} B$ 是 B 的唯一延拓 X , 满足

$$i^* X \in D_F^{\leq -1}, \quad i^! X \in D_F^{\geq 1}.$$

³³据勘误第 22 条修正。

同样, ${}^p j_! B$ (相应地, ${}^p j_* B$) 是 B 的唯一延拓 X , 满足

$$i^* X \in D_F^{\leq -2} \quad (\text{相应地 } D_F^{\leq 0}),$$

$$i^! X \in D_F^{\geq 0} \quad (\text{相应地 } D_F^{\geq 2}).$$

这只需应用 1.4.14。

推论 1.4.25. 对 $B \in \mathcal{C}_U$, $j_{!*} B$ 是 B 在 $\mathcal{C}$ 中的唯一延拓 X , 使得 X 没有属于 $\mathcal{C}_F$ 在 i_* 下本质像 $\overline{\mathcal{C}}_F$ 的非零子对象或非零商对象。

证明. 按定义, $j_{!*} B \in \mathcal{C} \subset D$. 若 $X \in \mathcal{C}$ 是 B 的延拓, 则 $i^* X \in D_F^{\leq -1}$ 当且仅当 ${}^p i^* X = 0$; 对偶地, $i^! X \in D_F^{\geq 1}$ 当且仅当 ${}^p i^! X = 0$. 把 $\mathcal{C}_F$ 经 ${}^p i_*$ 等同于 $\overline{\mathcal{C}}_F$ 后, ${}^p i^* X$ (相应地, ${}^p i^! X$) 是 X 属于 $\mathcal{C}_F$ 的最大商对象 (相应地, 最大子对象), 见 1.4.17.1. 因此 1.4.24 的刻画正好改写成这里的断言。□

命题 1.4.26. $\mathcal{C}$ 的简单对象恰为下列两类:

$${}^p i_* S \quad (S \text{ 是 } \mathcal{C}_F \text{ 的简单对象}),$$

以及

$$j_{!*} S \quad (S \text{ 是 } \mathcal{C}_U \text{ 的简单对象}).$$

证明. ${}^p i_* \mathcal{C}_F$ 的本质像 $\overline{\mathcal{C}}_F$ 是 $\mathcal{C}$ 的厚子范畴。因此, $S \in \mathcal{C}$ 简单, 当且仅当出现以下两种情形之一:

- (a) $S \in \overline{\mathcal{C}}_F$, 并且在 $\overline{\mathcal{C}}_F$ 中简单;
- (b) S 在 $\mathcal{C}/\overline{\mathcal{C}}_F$ 中的像简单, 且没有属于 $\overline{\mathcal{C}}_F$ 的非零子对象或非零商对象。

情形 (a) 给出 $\mathcal{C}_F$ 的简单对象经 ${}^p i_*$ 所得的对象; 由 1.4.25, 情形 (b) 给出 $\mathcal{C}_U$ 的简单对象经 $j_{!*}$ 所得的对象。□

2 分层空间与概形上的崴层

2.1 分层空间

2.1.1

设拓扑空间 X 带有环层 $\mathcal{O}$ 。设 $\mathcal{S}$ 是 X 的一个有限分拆，其各部分均局部闭，称为片层；再设

$$p : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

是一个函数，称为崴度。按“分拆”的定义，各片层都非空。假设每一片层的闭包都是若干片层之并。这些条件可以放宽，见 3.2.19。

回忆 0.0：对 $f : X \rightarrow Y$ ，我们把导出范畴之间通常记作 $Rf_!, Rf_*, Rf^!, Rf^*$ （或 Lf^* ）的函子简写为 $f_!, f_*, f^!, f^*$ 。出于 2.1.7 将说明的原因，普通层范畴之间的对应函子在左上方标以小圆圈，如 ${}^\circ f_*$ 。

定义 2.1.2. $D(X, \mathcal{O})$ 的子范畴 ${}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O})$ （相应地， ${}^p D^{\geq 0}(X, \mathcal{O})$ ）由满足下列条件的复形 K （相应地， $K \in D^+(X, \mathcal{O})$ ）组成：对每一片层 $S \in \mathcal{S}$ ，记其包含映射为 $i_S : S \hookrightarrow X$ ，则

$$H^n i_S^* K = 0 \quad (n > p(S))$$

（相应地，

$$H^n i_S^! K = 0 \quad (n < p(S))$$

）。

函子 ${}^\circ i_S^*$ 正合，所以也可把 ${}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O})$ 的定义改写为： $K \in {}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O})$ ，当且仅当对每个片层 S ， $H^i K$ 在 S 上的限制于 $i > p(S)$ 时为零。自然 t -结构的截断函子 $\tau_{\leq a}$ 与 $\tau_{\geq a}$ 因而都把 ${}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O})$ 映入自身。

如果函子 ${}^\circ i_S^!$ 的上同调维数有限，则

$$i_S^! : D^+(X, \mathcal{O}) \longrightarrow D^+(S, \mathcal{O})$$

自然延拓为 $D(X, \mathcal{O}) \rightarrow D(S, \mathcal{O})$ ；于是，即使 K 不属于 $D^+(X, \mathcal{O})$ ，条件“ $H^n i_S^! K = 0$ 对 $n < p(S)$ 成立”仍有意义。不过，这个条件会推出 K 有下界。更准确地说，若 $p \geq a$ ，则它推出

$$K \in D^{\geq a}(X, \mathcal{O}).$$

事实上，按偏序 $S_1 \subset \overline{S_2}$ 对片层 S 作下降归纳，可证 $H^i K$ 在每一片层上于 $i < a$ 时为零。固定 $i < a$ ，好三角

$$(\tau_{< a} K, K, \tau_{\geq a} K)$$

和 ${}^{\circ}i_S^!$ 的左正合性给出同构

$$H^i i_S^! \tau_{<a} K \xrightarrow{\sim} H^i i_S^! K.$$

归纳假设保证 $H^j \tau_{<a} K$ 在所有满足 $S \subset \bar{T}$ 且 $T \neq S$ 的片层 T 上为零, 因此 $\tau_{<a} K$ 在所考察的局部范围内支集于 S 。于是

$$H^i K|_S = H^i i_S^* \tau_{<a} K = H^i i_S^! \tau_{<a} K = H^i i_S^! K = 0.$$

不假设上同调维数有限时, 同一论证仍适用于 $K \in K^+(X, \mathcal{O})$ 。若整数 a, b 满足 $a \leq p \leq b$, 则

$$\begin{aligned} D^{\leq a}(X, \mathcal{O}) &\subset {}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O}) \subset D^{\leq b}(X, \mathcal{O}), \\ D^{\geq a}(X, \mathcal{O}) &\supset {}^p D^{\geq 0}(X, \mathcal{O}) \supset D^{\geq b}(X, \mathcal{O}). \end{aligned} \quad (2.1.2.1)$$

记

$${}^p D^{+, \leq 0}(X, \mathcal{O}) := D^+(X, \mathcal{O}) \cap {}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O}).$$

把 $+$ 换成 $-$ 或 b , 把 0 换成任意整数 n , 记号作同样理解。

命题 2.1.3. 对每个崴度 p ,

$$({}^p D^{+, \leq 0}(X, \mathcal{O}), {}^p D^{\geq 0}(X, \mathcal{O}))$$

是 $D^+(X, \mathcal{O})$ 上的一个 t -结构。

证明. 对片层数 N 作归纳。若 $N = 0$, 则 $X = \emptyset$, 结论显然。若 $N = 1$, 所得正是自然 t -结构平移 $p(X)$ 。若 $N \geq 2$, 取 X 的一个由若干片层组成的真闭子集 F , 并令 $U = X \setminus F$; 例如可取 F 为一个闭片层。对带有诱导分层的 F 与 U 应用归纳假设, 得到 $D^+(F, \mathcal{O})$ 与 $D^+(U, \mathcal{O})$ 上的 t -结构。再由 1.4.10 粘合, 便得到 $D^+(X, \mathcal{O})$ 上所需的 t -结构。□

推论 2.1.4.

$$({}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O}), {}^p D^{\geq 0}(X, \mathcal{O}))$$

是 $D(X, \mathcal{O})$ 上的一个 t -结构, 并在 $D^*(X, \mathcal{O})$ ($* = +, -, b$) 上诱导 t -结构。

证明. 取整数 a, b 使 $a \leq p \leq b$; 本证明中省略固定的 $(X, \mathcal{O})$ 。设 $K \in {}^p D^{\leq 0}$, $L \in {}^p D^{>0}$ 。由于 $L \in D^{>a}$,

$$\mathrm{Hom}(\tau_{\leq a} K, L) = 0.$$

另一方面, $\tau_{>a} K \in {}^p D^{+, \leq 0}$, 所以由 2.1.3,

$$\mathrm{Hom}(\tau_{>a} K, L) = 0.$$

对好三角 $(\tau_{\leq a} K, K, \tau_{>a} K)$ 使用 Hom 长正合列, 得到 $\mathrm{Hom}(K, L) = 0$ 。

最后取任意 $K \in D$ 。由 2.1.3, 存在好三角

$$(U, \tau_{>a} K, V), \quad U \in {}^p D^{+, \leq 0}, \quad V \in {}^p D^{>0}.$$

应用 TR4, 得到两个好三角

$$(\tau_{\leq a} K, Y, U), \quad (Y, K, V).$$

第一个说明 $Y \in {}^p D^{\leq 0}$, 第二个满足 1.3.1 (iii)。公理 1.3.1 (ii) 显然成立, 故得到 D 上的 t -结构; 称之为崴度 p 的 t -结构。

把相应的截断函子记作 ${}^p \tau$ 。由 ${}^p D^{\leq 0} \subset D^{\leq b}$ 与 ${}^p D^{\geq 0} \subset D^{\geq a}$, 对崴截断三角使用通常上同调长正合列可得

$$H^i({}^p \tau_{\leq 0} K) \xrightarrow{\sim} H^i K \quad (i < a),$$

以及³⁴

$$H^i K \xrightarrow{\sim} H^i({}^p \tau_{\geq 0} K) \quad (i > b).$$

因此 ${}^p \tau_{\leq 0}$ 与 ${}^p \tau_{\geq 0}$ 都保持 D^* ($*$ = +, -, b)。□

定义 2.1.5. X 上崴度 p 的 $\mathcal{O}$ -模崴层所成的范畴定义为

$$\mathcal{M}(p, X, \mathcal{O}) := {}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O}) \cap {}^p D^{\geq 0}(X, \mathcal{O}).$$

它是 $D^b(X, \mathcal{O})$ 的一个可容许阿贝尔子范畴。

命题 2.1.6. 设 U 是 X 的一个局部闭子集, 并且是若干片层之并; 记包含映射为 $j: U \hookrightarrow X$ 。对任意崴度 p , 函子

$$j_! : D(U, \mathcal{O}) \longrightarrow D(X, \mathcal{O}), \quad j^* : D(X, \mathcal{O}) \longrightarrow D(U, \mathcal{O})$$

均右 t -正合。

验证是立即的, 留给读者。由 1.3.17 (iii) 及其在 1.3.18 (i) 中的加强形式, $j_!$ 与 j^* 的右伴随 $j^!$ 与 j_* 均左 t -正合。

2.1.7 记号

以下常省略 $(X, \mathcal{O})$ 。有时把 ${}^p D^{\leq 0}$ (相应地, ${}^p D^{\geq 0}$) 写作 $D^{\leq p}$ (相应地, $D^{\geq p}$)。若 p 是常值函数 a , 则相对于自然 t -结构,

$$D^{\leq p} = D^{\leq a}, \quad D^{\geq p} = D^{\geq a}.$$

对任意整数 n ,

$${}^{p+n} D^{\leq 0} = {}^p D^{\leq n}, \quad {}^{p+n} D^{\geq 0} = {}^p D^{\geq n}.$$

若 $p \leq q$, 则

$${}^p D^{\leq 0} \subset {}^q D^{\leq 0}, \quad {}^p D^{\geq 0} \supset {}^q D^{\geq 0};$$

这推广了 (2.1.2.1)。相应地, 也把 ${}^p \tau_{\leq 0}$ 、 ${}^p \tau_{\geq 0}$ 简写为 $\tau_{\leq p}$ 、 $\tau_{\geq p}$, 并以 H^p 表示崴度 p 的 t -结构下的 H^0 。

在 2.1.6 的情形中, 导出范畴之间由普通层函子导出的函子仍简记为 $j_!, j^!, j^*, j_*$; 在崴层范畴之间诱导出的函子, 则在左上方标以 p 。例如, 对 $A \in \mathcal{M}(p, U, \mathcal{O})$, 置

$${}^p j_! A := \tau_{\geq p} j_! A = H^p(j_! A).$$

³⁴据勘误第 23 条修正。

由 1.3.18 (i),

$$({}^p j_!, {}^p j^!), \quad ({}^p j^*, {}^p j_*)$$

是两对伴随函子。普通层范畴上的函子仍在左上方标以小圆圈；它们对应常值崴度 0。

若 A 是 U 上崴度 p 的崴层, 则 $j_! A \in D^{\leq p}(X, \mathcal{O})$ 、 $j_* A \in D^{\geq p}(X, \mathcal{O})$ 。自然态射

$$\alpha : j_! A \longrightarrow j_* A$$

因而有分解

$$j_! A \longrightarrow {}^p j_! A \xrightarrow{\beta} {}^p j_* A \longrightarrow j_* A, \quad \beta = H^p(\alpha).$$

定义

$${}^p j_{!*} A := \text{Im}({}^p j_! A \rightarrow {}^p j_* A),$$

也常简记为 $j_{!*} A$ 。

若 A 是 X 上崴度 p 的崴层, 则把典范态射

$${}^p j^! A \longrightarrow {}^p j^* A$$

定义为复合

$${}^p j^! A \longrightarrow j^! A \longrightarrow j^* A \longrightarrow {}^p j^* A.$$

设

$$U \xrightarrow{k} V \xrightarrow{j} X$$

都是由若干片层组成的局部闭子集的包含映射。传递公式

$$(jk)_! = j_! k_!, \quad (jk)_* = j_* k_*, \quad (jk)^* = k^* j^*, \quad (jk)^! = k^! j^!$$

由 1.3.17 (iv) 给出崴层范畴上的相应公式。把 ${}^p j_!, {}^p j_{!*}, {}^p j_*$ 作用于 ${}^p k_! \rightarrow {}^p k_{!*} \hookrightarrow {}^p k_*$, 得到态射链

$$\begin{aligned} {}^p(jk)_! &= {}^p j_! {}^p k_! \rightarrow {}^p j_! {}^p k_{!*} \rightarrow {}^p j_{!*} {}^p k_{!*} \\ &\hookrightarrow {}^p j_* {}^p k_{!*} \hookrightarrow {}^p j_* {}^p k_* = {}^p(jk)_*. \end{aligned}$$

取复合态射的像, 便得到函子同构

$${}^p(jk)_{!*} \xrightarrow{\sim} {}^p j_{!*} {}^p k_{!*}. \quad (2.1.7.1)$$

补充 2.1.8。设 $U \subset X$ 是由若干片层组成的开集, $F = X \setminus U$, 两者带有诱导分层与诱导崴度。由 2.1.3, $D^+(X, \mathcal{O})$ 上的 t -结构正是把 $D^+(U, \mathcal{O})$ 与 $D^+(F, \mathcal{O})$ 上的结构按 1.4.10 粘合而得。因此 1.4 的全部形式体系都可使用。若 $i : F \hookrightarrow X$ 、 $j : U \hookrightarrow X$ 是包含映射, 则 2.1.7 中各函子与 1.4 的同名函子一致, 无论是否在左上方标 p , 无论使用上标还是下标 $!, *$; $j_{!*}$ 也一致。

命题 2.1.9. 设 $B \in \mathcal{M}(p, U, \mathcal{O})$ 。则 $j_{!*} B$ 是 B 在 $D(X, \mathcal{O})$ 中的唯一延拓 P , 使得对每个包含于 F 的片层 S , 记其到 X 的包含映射仍为 i_S , 都有

$$H^i i_S^* P = 0 \quad (i \geq p(S)), \quad H^i i_S^! P = 0 \quad (i \leq p(S)).$$

更准确地说, 这由 1.4.14 得到. 设 D' 是 $D(X, \mathcal{O})$ 中由满足上述两组消失条件的对象 K 组成的全子范畴. 则

$$j^* : D' \xrightarrow{\sim} D(U, \mathcal{O})$$

是范畴等价; 它限制为等价

$$D' \cap \mathcal{M}(p, X, \mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(p, U, \mathcal{O}),$$

其逆函子为 $j_{!*}$. ${}^p j_! B$ 与 ${}^p j_* B$ 也可用类似的消失条件刻画, 参见 1.4.23、1.3.14.

2.1.10

以下假设层度 p 满足:

$$S \subset \overline{T} \implies p(S) \geq p(T). \quad (2.1.10.1)$$

对每个整数 n , 令 F_n (相应地, U_n) 为满足 $p(S) \geq n$ (相应地, $p(S) \leq n$) 的各片层 S 之并. 于是 F_n 是闭集, U_n 是开集. 记

$$j_n : U_{n-1} \hookrightarrow U_n$$

为包含映射.

命题 2.1.11. 在 2.1.10 的假设与记号下, 设 A 是 U_k 上层度 p 的层, $a > k$ 是满足 $p \leq a$ 的整数, 并令 $j : U_k \hookrightarrow X = U_a$. 则

$$j_{!*} A = \tau_{\leq a-1} j_{a*} \cdots \tau_{\leq k} j_{k+1*} A.$$

证明. 这里各 $\tau_{\leq i}$ 都相对于自然 t -结构. 利用 (2.1.7.1), 只须验证

$$(j_{k+1})_{!*} A = \tau_{\leq k} j_{k+1*} A.$$

令 $F = U_{k+1} \setminus U_k$. 由 1.4.23,

$$(j_{k+1})_{!*} A = {}^p \tau_{\leq -1}^F j_{k+1*} A.$$

在 F 上, p 是常值函数 $k+1$, 故相对于 F 上的自然 t -结构,

$${}^p \tau_{\leq -1}^F = \tau_{\leq k}^F.$$

又因 $p \leq k$ 在 U_k 上成立, 由 (2.1.2.1), $A \in D^{\leq k}(U_k, \mathcal{O})$, 从而自然态射给出同构

$$\tau_{\leq k} j_{k+1*} A \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq k}^F j_{k+1*} A.$$

命题得证. □

2.1.12

下面说明本书记号与 M. Goresky、R. MacPherson 在 [4]、[5] 中所用记号的关系。

a) 他们研究取值于域 R (主要是 $R = \mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{C}$) 的上同调; 也就是说, 取 $\mathcal{O}$ 为取值 R 的常值层。

b) 各片层都是处处同维的拓扑流形; 分层还沿每一片层满足局部平凡性条件。具体说, 若

$$S \xrightarrow{j} X$$

是一个片层, $\mathcal{F}$ 是 S 上茎均为有限维 R -向量空间的局部常值层³⁵, 则 $R^i j_* \mathcal{F}$ 在每一片层上的限制仍是有限维局部常值层。若 S, T 是两个片层且 $S \subset \bar{T} \setminus T$, 则

$$\dim S < \dim T.$$

c) X 有一个稠密开片层 U_0 , 其补集的余维满足

$$\dim U_0 - \dim(X \setminus U_0) \geq 2.$$

d) 崴度函数只依赖于维数: 取函数

$$\bar{p} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad p(S) = \bar{p}(\dim S).$$

假设 $\bar{p}$ 单调递减 (因而满足 (2.1.10.1))、取非负值, 并且 $p(U_0) = 0$ 。

记 $j : U_0 \hookrightarrow X$ 。关键对象是

$$j_{!*}(R) \in D^b(X, R).$$

若按 2.1.11 描述它, 就自然要用函数 p' : 令 $p'(U_0) = 0$, 并对每一片层 $S \neq U_0$ 置

$$p'(S) = p(S) - 1.$$

从 $U = U_0$ 上的常值层 R 出发, 构造 $j_{!*}$ 的过程, 是依次把维数为

$$\dim U_0 - 2, \dim U_0 - 3, \dots$$

的片层添入 U , 每一步取直接像后再以 $\tau_{\leq p'(S)}$ 截断。Goresky 与 MacPherson 把这个函数 p' 称为崴度。从本书的观点看, 这相当于把 ${}^p j_{!*}$ 写成 ${}^{p'} j_{*}$, 并会在描述对偶现象时引入指标平移。

Goresky 与 MacPherson 还假设 $\bar{p}$ 下降得不太快, 即

$$\bar{p}(n) - \bar{p}(n+1) = 0 \quad \text{或} \quad 1.$$

下文 2.1.14 表明, 这一条件保证所得对象与分层的选择无关。

³⁵据勘误第 24 条修正。

2.1.13

以下保留 2.1.12 的这些假设：

- a) $\mathcal{O}$ 是取值于环 R 的常值层，其中 R 是左 Noether 环。
 b) 各片层都是处处同维的拓扑流形。若片层 S 包含于片层 T 的闭包，则³⁶

$$\dim S < \dim T.$$

c) 对任一片层 $j: S \hookrightarrow X$ ，普通层范畴上的函子 ${}^\circ j_*$ 在 R -模层范畴上具有有限上同调维数。若 $\mathcal{F}$ 是 S 上有限型 R -模的局部常值层，则每个 $R^i j_* \mathcal{F}$ 在各片层上仍为有限型局部常值层。

若 U 是若干片层组成的局部闭集，记

$$D_c(U, R), \quad \text{或在需要标明分层时记作 } D_S(U, R),$$

为 $D(U, R)$ 的全三角子范畴，由所有可构造复形 K 组成；这里可构造指每个 $H^i K$ 在各片层上都是有限型局部常值层。类似地定义 $D_c^*(U, R)$ ($* = +, -, b$)。

条件 c) 保证：若 $j: U \hookrightarrow V$ ，且 U, V 都是若干片层组成的局部闭集，则

$$j_!, j^!, j_*, j^*$$

都保持这些子范畴。对 $j_!, j^*$ ，这是立即的。若 U 只有一个片层， j_* 的断言来自谱序列

$$R^p j_* H^q K \implies H^{p+q} R j_* K.$$

一般情形对组成 U 的片层数作归纳。设 $k: S \hookrightarrow U$ 是一个开片层，并由好三角

$$(K, k_* k^* K, L)$$

定义 L 。由于 $k_* k^* K$ 可构造， L 也可构造，且支集于 $U' = U \setminus S$ 。对 $U' \hookrightarrow X$ 应用归纳假设， $j_* L$ 可构造；再由三角

$$(j_* K, (jk)_* k^* K, j_* L)$$

知 $j_* K$ 也可构造。最后， $j^!$ 可化归到 j 为闭嵌入的情形，并由补开集的包含映射 k 的 k_* 情形推出：使用好三角

$$(j_! j^! K, K, k_* k^* K).$$

若 $F \subset U$ 是若干片层组成的闭集，则 $\tau_{\leq a}^F$ 显然保持 $D_c(U, R)$ 。因此，1.4.10 的证明表明：对任意崱度 p ， $\tau_{\leq p}$ 与 $\tau_{\geq p}$ 都保持 $D_c(X, R)$ 。所谓 p - $\mathcal{S}$ -崱层，就是 $D_c(X, R)$ 中崱度 p 的崱层。

设 $\mathcal{T}$ 是 X 的另一个分层，它加细 (refines; 法: *raffine*) $\mathcal{S}$ ，并且也满足 b)、c)。

命题 2.1.14. 设 p 是 $\mathcal{S}$ 上的崱度， q 是 $\mathcal{T}$ 上的崱度。假设每当 $\mathcal{S}$ 的片层 S 包含 $\mathcal{T}$ 的片层 T 时，都有

$$p(S) \leq q(T) \leq p(S) + \dim S - \dim T.$$

³⁶译者注：原文未在此排除 $S = T$ 。按 2.1.12 b)，此处应理解为 $S \subset \overline{T} \setminus T$ ，即两个不同片层之间的边界关系。否则取 $S = T$ 即与上述严格不等式矛盾。

则 $D_{\mathcal{T}}(X, R)$ 上歳度 q 的 t -结构, 在 $D_{\mathcal{S}}(X, R)$ 上诱导歳度 p 的 t -结构。

证明. 只须验证

$$D_{\mathcal{S}}^{\leq p}(X, R) \subset D_{\mathcal{T}}^{\leq q}(X, R), \quad D_{\mathcal{S}}^{\geq p}(X, R) \subset D_{\mathcal{T}}^{\geq q}(X, R).$$

第一条包含立即由 $S \supset T$ 时 $p(S) \leq q(T)$ 得到。

验证第二条。设 $K \in D_{\mathcal{S}}^{\geq p}(X, R)$, T 是 $\mathcal{T}$ 的一个片层, S 是包含 T 的 $\mathcal{S}$ -片层, 并写成

$$T \xrightarrow{i} S \xrightarrow{j} X.$$

只须证明

$$H^n(ji)^!K = 0 \quad (n < q(T)).$$

有 $(ji)^! = i^!j^!$; 上文已知, 各 $H^m j^!K$ 是 S 上的局部常值层, 并在 $m < p(S)$ 时为零。

记 T, S 的定向层 (orientation sheaf; 法: *faisceau d'orientation*) 分别为 or_T, or_S 。它们局部同构于常值层 $\mathbb{Z}$ 。令

$$\text{or} := \underline{\text{Hom}}(\text{or}_T, i^* \text{or}_S), \quad d := \dim S - \dim T;$$

or 是 T 在 S 中的法定向层。这里 $\underline{\text{Hom}}$ 表示层内 Hom 。若 L 是 S 上的层复形, 且各上同调层局部常值, 则

$$i^!L \xrightarrow{\sim} i^*L \otimes_{\mathbb{Z}} \text{or}[-d].$$

取 $L = j^!K$, 便有

$$H^n i^!j^!K = 0 \quad (n < p(S) + d).$$

而假设给出 $q(T) \leq p(S) + d$, 故结论成立。□

推论 2.1.15. 每个 p - $\mathcal{S}$ -歳层都是 q - $\mathcal{T}$ -歳层, 且包含函子正合。若 U 是若干 $\mathcal{S}$ -片层组成的局部闭集, $j: U \hookrightarrow X$, 则

$${}^q j_!, {}^q j^!, {}^q j_*, {}^q j^*, {}^q j_{!*}$$

限制到 p - $\mathcal{S}$ -歳层后, 分别就是

$${}^p j_!, {}^p j^!, {}^p j_*, {}^p j^*, {}^p j_{!*}.$$

2.1.16

除 2.1.13 的条件外, 再假设 R 是交换域, 且 X 有一个局部有限三角剖分, 使 S 的每一片层都是若干开单形之并。例如, X 可以是带有 Whitney 分层 (Whitney stratification; 法: *stratification de Whitney*) 的实代数集。此时可使用 Verdier 对偶理论。Verdier 对偶是 $D_c(X, R)$ 的一个对合自同构; 若 $j: U \hookrightarrow X$ 是若干片层组成的局部闭集的包含映射, 它互换 $j_!$ 与 j_* , 也互换 $j^!$ 与 j^* 。若不假设 R 交换, 则对偶把 $D_c(X, R)$ 送到 $D_c(X, R^{\text{opp}})$ 。

设片层 S 的维数为 d , 定向层为 or 。 S 上的 Verdier 对偶

$$\mathbb{D}K := R\mathbf{H}\mathbf{om}(K, R \otimes \text{or}[d])$$

对 $K \in D_S(S, R)$ 满足

$$H^i \mathbb{D}K = (H^{-d-i} K)^\vee \otimes \text{or}.$$

这里必须使用 K 的上同调层局部常值且秩有限这一事实, 也要用到 R 是域。交换 Artin 局部环也可以, 例如 $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$: 只须选取内射对偶模 I (当 $R = \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$ 时可取 $I = R$), 并对到一点的投影 a 把 Verdier 对偶定义为 $K \mapsto R\mathbf{H}\mathbf{om}(K, Ra^! I)$ 。

定义崱度 p 的对偶崱度 (*dual perversity*; 法: *perversité duale*) p^* 为

$$p^*(S) := -p(S) - \dim S.$$

上式表明, $\mathbb{D}$ 互换 $D^{\geq p}$ 与 $D^{\leq p^*}$, 也互换 $D^{\leq p}$ 与 $D^{\geq p^*}$; 这里 $p^{**} = p$ 。特别地, 它互换崱度 p 与崱度 p^* 的崱层, 也互换 ${}^p H^i$ 与 ${}^{p^*} H^{-i}$ 。对若干片层组成的局部闭集的包含映射 j , 它分别互换

$${}^p j_! \leftrightarrow {}^{p^*} j_*, \quad {}^p j^! \leftrightarrow {}^{p^*} j^*, \quad {}^p j_{!*} \leftrightarrow {}^{p^*} j_{!*}.$$

在 $D_c(X, R)$ 中, 崱度 p 的崱层也可由下列条件刻画: 对每一片层 $j: S \hookrightarrow X$,

$$H^i j^* K = 0 \quad (i > p(S)), \quad H^i j^* \mathbb{D}K = 0 \quad (i > p^*(S)).$$

若所有片层都是偶数维, 则存在自对偶崱度 (*self-dual perversity*; 法: *perversité auto-duale*)

$$p_{1/2}(S) = -\frac{1}{2} \dim S.$$

命题 2.1.17. 在 2.1.16 的假设下, 设所有片层均为偶数维, 并取自对偶崱度 $p_{1/2}$ 。若 $j: U \hookrightarrow X$ 是若干片层组成的开集, A 是 U 上的自对偶崱层, 则 $j_{!*} A$ 是 A 在 $D_c(X, R)$ 中唯一的自对偶延拓 P , 满足: 对每一片层 $S \subset X \setminus U$,

$$H^i P|_S = 0 \quad \left(i \geq -\frac{1}{2} \dim S \right).$$

$j_{!*} A$ 的自对偶性来自 A 与 $j_{!*}$ 的自对偶性; 其唯一性直接应用 2.1.9 与 2.1.16 即得。

注记 2.1.18. 若 U 可定向、光滑且纯维数为 d , 可取 $A = R[d/2]$, 即把常值层 R 放在次数 $-d/2$ 。此时 $j_{!*} A$ 就是导言中记作 $\underline{IC}'$ 的相交复形; 2.1.17 正是 Verdier 对 $\underline{IC}'$ 的刻画。

2.1.19

设 $(X, \mathcal{S}, \mathcal{O})$ 如 2.1.1, $\mathcal{O}^{\text{opp}}$ 是 $\mathcal{O}$ 的反环层 (*opposite ring sheaf*; 法: *faisceau d'anneaux opposé*), p, q 是两个崴度。下述命题刻画函子

$$\overset{L}{\otimes} : D^-(X, \mathcal{O}^{\text{opp}}) \times D^-(X, \mathcal{O}) \longrightarrow D^-(X, \mathbb{Z})$$

与

$$R\text{Hom} : D^-(X, \mathcal{O}) \times D^+(X, \mathcal{O}) \longrightarrow D^+(X, \mathbb{Z})$$

相对于崴度的行为。若 $\mathcal{O}$ 交换, 当然可把 $\mathbb{Z}$ 换成 $\mathcal{O}$ 。

命题 2.1.20. 函子 $\overset{L}{\otimes}$ 把 $D^{\leq p} \times D^{\leq q}$ 映入 $D^{\leq p+q}$; 函子 $R\text{Hom}$ 把 $D^{\leq p} \times D^{\geq q}$ 映入 $D^{\geq q-p}$ 。

证明. 第一条断言显然, 因为导出张量积逐点计算; 第二条由剥离论证 (*dévissage*; 法: *dévissage*) 证明。

取 $K \in K^{\leq p}$ 、 $L \in D^{\geq q}$ 。³⁷通过剥离, 可化归到

$$K = j_! A[-n],$$

其中 A 是片层 S 上的一个层, $j : S \hookrightarrow X$ 是包含映射, 并且 $n \leq p(S)$ 。此时

$$R\text{Hom}(j_! A[-n], L) = j_* R\text{Hom}(A[-n], j^! L).$$

由假设, $j^! L \in D^{\geq q(S)}(S, \mathcal{O})$, 故

$$R\text{Hom}(A[-n], j^! L) \in D^{\geq q(S)-n}(S, \mathbb{Z}) \subset D^{\geq q(S)-p(S)}(S, \mathbb{Z}).$$

函子 j_* 对任意崴度都左 t -正合, 因此 $R\text{Hom}(j_! A[-n], L) \in D^{\geq q-p}$ 。□

令 $p = q$, 立即得到:

推论 2.1.21. 若 $K \in D^{\leq p}(X, \mathcal{O})$ 、 $L \in D^{\geq p}(X, \mathcal{O})$, 则

$$H^i R\text{Hom}(K, L) = 0 \quad (i < 0).$$

也可把 2.1.4 的 $\text{Hom}(K, L[i]) = 0$ ($i < 0$) 局部化 (*localization*; 法: *localisation*), 得到这个推论。

推论 2.1.22. 若 $K \in D^{\leq p}(X, \mathcal{O})$ 、 $L \in D^{\geq p}(X, \mathcal{O})$, 则

$$U \longmapsto \text{Hom}_{D(U, \mathcal{O})}(K|_U, L|_U)$$

是 X 上的一个预层 (*presheaf*; 法: *préfaisceau*), 并且事实上是层。

由 2.1.21, $H^i R\text{Hom}(K, L) = 0$ 对 $i < 0$ 成立。因此局部到整体谱序列 (*local-to-global spectral sequence*; 法: *suite spectrale du local au global*) 给出

$$\text{Hom}_{D(U, \mathcal{O})}(K|_U, L|_U) = H^0(U, H^0 R\text{Hom}(K, L)).$$

³⁷译者注: 原文此处作 $K^{\leq p}$ 。根据命题及 2.1.19 的函子定义域, 这里应理解为 $D^{\leq p}$ 。

给 X 的每个开集 U 配上 $\mathcal{S}$ 诱导的分层和 p 诱导的崴度。 X 上崴度 p 的崴层限制到 U 后仍是 U 上崴度 p 的崴层。

推论 2.1.23. X 的各开集上的崴度 p 的崴层组成一个叠。

证明. 这里使用 3.2; 2.2.19 将给出一个不依赖 3.2 的变体。由 2.1.22, 崴层先组成一个“预叠”: 态射可以粘合。对象的粘合使用 3.2.4, 而 2.1.21 保证其假设成立。□

变体 2.1.24. 不一定要取 X 为分层拓扑空间, 也可以取分层拓扑斯。一个重要情形是: X 是带有分层的概形 S 的平展拓扑斯。

2.2 概形

2.2.1

作为模型, 先考虑复代数簇。也就是把 2.1 应用于下列情形。

空间。设 X 是 $\mathbb{C}$ 上有限型分离概形, 取复点集 $X(\mathbb{C})$ 及其通常拓扑。

崴度。只考虑这样的崴度: 一个片层 S 的 $p(S)$ 只依赖其维数; 这里的拓扑维数总是偶数。因此所需数据是定义在非负偶整数上的函数

$$p : \{0, 2, 4, \dots\} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

置

$$p^*(n) := -n - p(n),$$

这就是对偶崴度函数。假设 p 与 p^* 都单调递减; 等价地, 对 $n \leq m$,

$$0 \leq p(n) - p(m) \leq m - n.$$

分层。回忆: X 的任意代数分层都有 Whitney 加细 (见 J. L. Verdier, “Stratifications de Whitney et théorème de Bertini–Sard”, *Invent. Math.* 36 (1976), 295–312)。我们使用的分层, 是 X 的各片层等维的代数 Whitney 分层; 它们满足 2.1.13 中我们所需的 a)、b)、c)。在以下复数情形的讨论中, 简称其为分层。

对每个分层 $\mathcal{S}$, 定义其崴度 $p_{\mathcal{S}}$ 为

$$p_{\mathcal{S}}(S) = p(2 \dim_{\text{alg}} S) = p(\dim_{\text{top}} S).$$

以下把代数维数 $\dim_{\text{alg}} S$ 简记为 $\dim S$ 。

设 R 是左 Noether 环。可构造导出范畴 (*constructible derived category*; 法: *catégorie dérivée constructible*)

$$D_c(X(\mathbb{C}), R)$$

是 $D(X(\mathbb{C}), R)$ 的全子范畴, 由上同调层均可构造的复形 K 组成。又置

$$D_c^b(X(\mathbb{C}), R) := D^b(X(\mathbb{C}), R) \cap D_c(X(\mathbb{C}), R).$$

它是各 $D_S^b(X(\mathbb{C}), R)$ 的滤过并。崴度 p_S 在每个 $D_S^b(X(\mathbb{C}), R)$ 上定义一个 t -结构。由 2.1.14 及对 p 的假设，当分层不断加细时，这些 t -结构彼此诱导。取极限便在 $D_c^b(X(\mathbb{C}), R)$ 上得到崴度 p 的 t -结构

$$(D_c^{b, \leq p}(X(\mathbb{C}), R), D_c^{b, \geq p}(X(\mathbb{C}), R)).$$

仿照 2.1.4，可由此得到 $D_c(X(\mathbb{C}), R)$ 上的 t -结构。具体地，取整数 a, b ，使对 $0 \leq i \leq \dim X$ 都有

$$a \leq p(2i) \leq b.$$

定义 $D_c^{\leq p}(X(\mathbb{C}), R)$ 为满足下列条件的 $K \in D_c(X(\mathbb{C}), R)$ 所成的子范畴：

$$H^i K = 0 \quad (i > b), \quad \tau_{[a, b]} K \in D_c^{b, \leq p}(X(\mathbb{C}), R).$$

对偶地， $D_c^{\geq p}(X(\mathbb{C}), R)$ 由满足

$$H^i K = 0 \quad (i < a), \quad \tau_{[a, b]} K \in D_c^{b, \geq p}(X(\mathbb{C}), R)$$

的对象组成。

对任意 $S \subset X$ ，约定

$$p(S) := p(2 \dim S).$$

命题 2.2.2. 设 $K \in D_c(X(\mathbb{C}), R)$ 。下列条件等价：

- (i) $K \in D_c^{\leq p}(X(\mathbb{C}), R)$ (相应地， $K \in D_c^{\geq p}(X(\mathbb{C}), R)$)。³⁸
- (ii) 对 X 的每个不可约子簇 S' ，都存在一个稠密 *Zariski* 开集 $S \subset S'$ ；若 $i : S(\mathbb{C}) \hookrightarrow X(\mathbb{C})$ 是包含映射，则

$$H^n i^* K = 0 \quad (n > p(S))$$

(相应地， $H^n i^! K = 0$ 对 $n < p(S)$ 成立)。

再设 $\mathcal{T}$ 是有限个 *Zariski* 局部闭、光滑、等维子集组成的族，其并为 X ；并且对每个 $S \in \mathcal{T}$ ，记 $i_S : S \hookrightarrow X$ ，各 $H^n i_S^* K$ 与 $H^n i_S^! K$ 都局部常值。则上述条件还等价于：

- (iii) 对每个 $S \in \mathcal{T}$ ，

$$H^n i_S^* K = 0 \quad (n > p(S))$$

(相应地， $H^n i_S^! K = 0$ 对 $n < p(S)$ 成立)。

证明. 先假设 $K \in D_c^b$ 。对任意充分细的分层 $\mathcal{S}$ ，都有 $K \in D_S^b$ 。特别地，可以找到满足命题所列性质的族 $\mathcal{T}$ 。只须证明

$$(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i).$$

(ii) $\implies$ (iii) 显然。为证 (i) $\implies$ (ii)，取充分细的分层 $\mathcal{S}$ ，使 $K \in D_S^b$ ，因而 $K \in D_S^{b, \leq p}$ (相应地， $D_S^{b, \geq p}$)，并使 S' 是某个片层的闭包即可。

³⁸据勘误第 25 条修正。

再证 (iii) $\Rightarrow$ (i)。取加细 $\mathcal{T}$ 的分层 $\mathcal{S}$, 使 $K \in D_{\mathcal{S}}^b$ 。关于 p 的假设与 2.1.14 的证明表明

$$K \in D_{\mathcal{S}}^{b, \leq p} \quad (\text{相应地 } D_{\mathcal{S}}^{b, \geq p}),$$

故 (i) 成立。

一般情形中, 取 a, b 使

$$a \leq p(2i) \leq b \quad (0 \leq i \leq \dim X).$$

在 (i)、(ii)、(iii) 中把 K 换成 $\tau_{\geq a}K$ (相应地, $\tau_{\leq b}K$), 所得条件与原条件等价; 只须再证明每个条件都蕴含

$$H^i K = 0 \quad (i > b) \quad (\text{相应地 } i < a).$$

对 (i), 这是定义的一部分。对 (ii)、(iii), 重复 2.1.2 后面证明 (2.1.2.1) 的论证即可; 处理 (iii) 时, 先把 $\mathcal{T}$ 换成更细的分层。处理 (ii) 时, 对 $\dim S'$ 作下降归纳, 证明: 对每个不可约子簇 S' 及每个 $i > b$ (相应地, $i < a$), 存在稠密开集 $S \subset S'$, 使 $H^i K|_S = 0$ 。
□

2.2.3

若 U 是 X 的局部闭子集, 则对任意充分细的分层, U 都是若干片层之并。因此, 可对包含映射 $j: U \hookrightarrow X$ 应用 2.1.6: $j_!$ 与 j^* 右 t -正合, $j^!$ 与 j_* 左 t -正合。以下沿用 2.1.7 的记号 $\tau_{\leq p}, H^p, {}^p j_!, \dots$, 其中各项结论仍然成立。

若 U 是 X 的 Zariski 开集, 闭补集为 F , 记 $i: F \hookrightarrow X$ 为包含映射。此时 $D_c(X(\mathbb{C}), R)$ 上崴度 p 的 t -结构, 是把 $D_c(U(\mathbb{C}), R)$ 与 $D_c(F(\mathbb{C}), R)$ 上的结构粘合而得。因此可如 2.1.8 那样应用 1.4 的形式体系。特别地, 对 U 上的 p -崴层 A , 由 1.4.23 有³⁹

$$j_! A = {}^p \tau_{\leq -1}^F j_* A. \quad (2.2.3.1)$$

假设 $\dim F \leq d$, 置 $t = p(2d)$ 。由于 $\tau_{< t} i^* j_* A \in {}^p D_c^{< 0}$, 并且⁴⁰

$$(\tau_{< t} i^* j_* A, i^* j_* A, \tau_{\geq t} i^* j_* A)$$

是好三角, 若 $\tau_{\geq t} i^* j_* A \in {}^p D_c^{\geq 0}$, 便有同构

$${}^p \tau_{< 0} i^* j_* A \xrightarrow{\sim} \tau_{< t} i^* j_* A,$$

从而

$${}^p \tau_{< 0}^F j_* A \xrightarrow{\sim} \tau_{< t}^F j_* A.$$

命题 2.2.4. 若 F 光滑、纯维数为 d , 并且 $H^i i^* j_* A$ 在 F 上于 $i \geq t := p(2d)$ 时局部常值, 则

$$j_! A = \tau_{\leq t-1}^F j_* A. \quad (2.2.4.1)$$

³⁹据勘误第 26 条修正。

⁴⁰据勘误第 27 条修正。

这是把 2.2.2 (iii) 应用于 F 与 $\mathcal{T} = \{F\}$ 后, 由上述比较立即得到的。它与 j_* 的传递性合在一起, 就是 2.1.11 的对应版本。

同样, 在关于 F 的相同假设下, 若 $H^i i^* j_* A$ 的局部常值性分别对 $i \geq t-1$ 或 $i \geq t+1$ 成立, 则由 1.4.23 分别得到

$${}^p j_! A = \tau_{\leq t-2}^F j_* A, \quad (2.2.4.2)$$

以及

$${}^p j_* A = \tau_{\leq t}^F j_* A. \quad (2.2.4.3)$$

命题 2.2.5. 若 $f: X \rightarrow Y$ 是拟有限态射 (*quasi-finite morphism*; 法: *morphisme quasi-fini*), 则 $f_!$ 与 f^* 右 t -正合; 它们的右伴随 $f^!$ 与 f_* 左 t -正合。

证明. 对 $K \in D_c$, 条件 $K \in D_c^{\leq p}$ 等价于对每个 i 都有支集维数估计

$$p(2 \dim \operatorname{Supp} H^i K) \geq i.$$

普通层函子 ${}^\circ f_!$ 正合, 所以

$$H^i f_! K = {}^\circ f_! H^i K, \quad \operatorname{Supp} H^i f_! K = \overline{f(\operatorname{Supp} H^i K)}.$$

由拟有限性,

$$\dim \operatorname{Supp} H^i f_! K = \dim \operatorname{Supp} H^i K.$$

同理,⁴¹

$$H^i f^* K = {}^\circ f^* H^i K, \quad \operatorname{Supp} H^i f^* K = f^{-1}(\operatorname{Supp} H^i K),$$

且

$$\dim \operatorname{Supp} H^i f^* K \leq \dim \operatorname{Supp} H^i K.$$

这证明 $f_!$ 与 f^* 右 t -正合; 再由伴随性和 1.3.17 (iii), $f^!$ 与 f_* 左 t -正合。□

注记。这里至关重要是: 歲度条件用片层的维数而非余维数定义; 当 X, Y 不同维时, 两者不可混用。

推论 2.2.6.

(i) 若 f 有限, 则 $f_! = f_*$ 是 t -正合函子。

(ii) 若 f 平展, 则 $f^! = f^*$ 是 t -正合函子。

⁴¹译者注: 此处保留原书的等号。若 Supp 指非零茎点集的闭包, 则一般只能断言 $\operatorname{Supp} H^i f^* K \subset f^{-1}(\operatorname{Supp} H^i K)$ 。例如, 令 $j: \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ 为开嵌入, 取 $K = j_! R$, 令 f 为原点的包含映射。此时 $f^* K = 0$, 但 $f^{-1}(\operatorname{Supp} K) = \{0\}$ 。上述包含关系已足以推出下文的维数不等式。若支集指非零茎点集, 则本等式成立, 但前面的 $f_!$ 支集公式应去掉闭包。

2.2.7

设 f 拟有限, F 是 X 上的 p -崴层。则

$$f_! F \in {}^p D^{\leq 0}, \quad f_* F \in {}^p D^{\geq 0}.$$

自然态射 $f_! F \rightarrow f_* F$ 因而有分解

$$f_! F \longrightarrow {}^p f_! F \longrightarrow {}^p f_* F \longrightarrow f_* F. \quad (2.2.7.1)$$

定义

$$f_{!*} F := \text{Im}({}^p f_! F \rightarrow {}^p f_* F).$$

2.2.8

与 2.1.20 相同, 若崴度 p, q 满足: 对 $n \leq m$,

$$(p+q)(n) - (p+q)(m) \leq m - n,$$

则导出张量积把

$$D_c^{-, \leq p} \times D_c^{-, \leq q}$$

映入 $D_c^{-, \leq p+q}$ 。若 $q - p$ 单调递减, 则 $R\text{Hom}$ 把

$$D_c^{-, \leq p} \times D_c^{+, \geq q}$$

映入 $D_c^{+, \geq q-p}$ 。

特别地, 若 $K \in D_c^{\leq p}$ 、 $L \in D_c^{\geq p}$, 则

$$H^i R\text{Hom}(K, L) = 0 \quad (i < 0),$$

而

$$U \longmapsto \text{Hom}_{D(U)}(K|_U, L|_U)$$

是一个层。如 2.1.23, p -崴层组成一个叠。

若 R 是交换域, Verdier 对偶互换⁴²

$$D^{>p} \leftrightarrow D^{\leq p*}, \quad D^{\geq p} \leftrightarrow D^{\leq p*},$$

从而互换 p -崴层与 p^* -崴层, 也互换

$${}^p H^j \leftrightarrow {}^{p*} H^{-j};$$

参见 2.1.16。

⁴²译者注: 这里保留原书的两组上下标。它们重复且不相容。由 2.1.16, 正确的两组对应为 $D^{\geq p} \leftrightarrow D^{\leq p*}$ 与 $D^{\leq p} \leftrightarrow D^{\geq p*}$ 。

2.2.9

设 X 是域 k 上的有限型概形, ℓ 是不同于 $\text{char } k$ 的素数。以下所论的层均取平展拓扑; 局部闭子集仍按 Zariski 拓扑理解。⁴³ 目标是定义 X 上崴度 p 的 $\mathbb{Q}_\ell$ -崴层。 $\mathbb{Z}/\ell$ 的情形稍简单, 先从它开始。

2.2.10

由于野分歧 (*wild ramification*; 法: *ramification sauvage*) 现象, 不再有能起 Whitney 分层作用的分层。我们改为考虑二元组 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$, 其中:

a) $\mathcal{S}$ 是 X 的有限局部闭分拆, 各部分称为片层。每一片层的闭包都是若干片层之并; 基变换到 $\bar{k}$ 后, 各片层的约化概形均光滑且处处同维。

b) 对每个片层 S , $\mathcal{L}$ 指定一个有限集合 $\mathcal{L}(S)$, 其元素是 S 上局部常值 $\mathbb{Z}/\ell$ -模层的同构类代表, 并且这些层在局部常值 $\mathbb{Z}/\ell$ -模层范畴中不可约。

称 $\mathbb{Z}/\ell$ -模层是 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ -可构造的, 如果它在每个片层 S 上的限制局部常值, 并且是同构类属于 $\mathcal{L}(S)$ 的层的有限次逐次扩张。记

$$D_{\mathcal{S}, \mathcal{L}}^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$$

为 $D^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$ 的全子范畴, 由 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ -可构造复形组成; 也就是说, 各 $H^i K$ 均为 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ -可构造层。

若 $\mathcal{S}$ 的每一片层都是 $\mathcal{S}'$ 的若干片层之并, 且 $\mathcal{L}(S)$ 中的层都是 $(\mathcal{S}', \mathcal{L}')$ -可构造的, 则称 $(\mathcal{S}', \mathcal{L}')$ 加细 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ 。

最后加入条件:

c) 对 $S \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(S)$, 若 $j: S \hookrightarrow X$ 是包含映射, 则各 $R^n j_* \mathcal{F}$ 都是 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ -可构造的。

与 2.1.13 相同, 条件 c) 保证: 若 $j: U \hookrightarrow V \subset X$, 且 U, V 都是若干片层组成的局部闭集, 则 $j_*, j_!, j^*, j^!$ 在相应的 $D_{\mathcal{S}, \mathcal{L}}^b(-, \mathbb{Z}/\ell)$ 之间取值。

Rj_* 的可构造性定理 ([3], 1.1) 说明: 任意满足 a)、b) 的系统 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ 都有一个满足 a)、b)、c) 的加细 $(\mathcal{S}', \mathcal{L}')$ 。事实上, 若在由维数至少为 n 的片层组成的部分上 a)、b)、c) 已成立, 可构造性定理允许加细该系统而不改动这些片层, 使条件在维数至少为 $n-1$ 的部分上也成立; 重复此过程即可。

2.2.11

设 p 如 2.2.1, 并在 $\mathcal{S}$ 上定义崴度

$$p_{\mathcal{S}}(S) := p(2 \dim S).$$

如前所述, 它在 $D_{\mathcal{S}, \mathcal{L}}^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$ 上给出一个 t -结构。当 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ 不断加细时, 这些 t -结构彼此诱导; 纯性定理 SGA 4 XVI 3.7 给出 2.1.14 的对应版本。取极限, 便在滤过并

$$D_c^b(X, \mathbb{Z}/\ell) = \bigcup_{(\mathcal{S}, \mathcal{L})} D_{\mathcal{S}, \mathcal{L}}^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$$

⁴³ 据勘误第 28 条修正。

上得到 t -结构

$$(D_c^{b, \leq p}(X, \mathbb{Z}/\ell), D_c^{b, \geq p}(X, \mathbb{Z}/\ell)).$$

再如 2.2.1 那样, 得到 $D_c(X, \mathbb{Z}/\ell)$ 上的 t -结构。2.2.2–2.2.8 仍然成立, 证明实质相同; 平展上同调中的对偶形式体系 (SGA 4 XVIII) 取代 Verdier 对偶。

特别地, 与分层空间的情形相同, 存在自对偶崕度⁴⁴

$$p_{1/2} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad S \longmapsto -\dim S.$$

2.2.12

设 x 是 X 的一点, 不必为闭点。把 x 在 X 中的包含映射分解为

$$x \xrightarrow{j} \overline{\{x\}} \xrightarrow{i} X,$$

并定义

$$i_x^! := j^* i^!.$$

用这一记号, 2.2.2 (ii) 对 $D_c^{\leq p}$ (相应地, $D_c^{\geq p}$) 可改写成如下更简洁的形式:

(ii)* 对 X 的每一点 x (闭点或非闭点), 记 $\dim x := \dim \overline{\{x\}}$, 则⁴⁵

$$H^i i_x^* K = 0 \quad (i > p(2 \dim x)),$$

相应地, ⁴⁶

$$H^i i_x^! K = 0 \quad (i < p(2 \dim x)).$$

这一逐点表述还可用于不要求可构造性、也不借助分层的 t -结构构造; 见 [Gab04]。⁴⁷

2.2.13

对 $\mathbb{Z}/\ell^n$ -模层, 更一般地, 对有限 $\mathbb{Z}/\ell^n$ -代数 R 的 R -模层, 也作同样处理。仍可让 $\mathcal{L}$ 在每一片层上指定一个由不可约局部常值 $\mathbb{Z}/\ell$ -模层组成的有限族, 并约定: $K \in D^b(X, R)$ 是 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ -可构造的, 是指各

$$\ell^i H^* K / \ell^{i+1} H^* K$$

作为 $\mathbb{Z}/\ell$ -模层都是 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ -可构造的。

⁴⁴据勘误第 29 条修正。

⁴⁵据勘误第 31 条修正。

⁴⁶据勘误第 32 条修正。

⁴⁷据勘误第 30 条修正。

2.2.14

对 $\mathbb{Z}_\ell$ -层 (相应地, $\mathbb{Q}_\ell$ -层等), 也按同一路线处理: 先定义满足通常六函子形式体系的三角范畴

$$D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \quad (\text{相应地 } D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell), \dots),$$

再定义其 “自然” t -结构, 使它的心成为 X 上可构造 $\mathbb{Z}_\ell$ -层 (相应地, $\mathbb{Q}_\ell$ -层等) 所成的阿贝尔范畴 (SGA 5 VII 1.1)。

若基域有限或代数闭; 更一般地, 若对 k 的每个有限扩张 k' , 群

$$H^i(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k'), \mathbb{Z}/\ell)$$

均有限, 则 [1], 1.1.2 给出如下方案: 置

$$D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell) := 2\varprojlim_n D_{ctf}^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n). \quad (2.2.14.1)$$

这里 ctf 表示 “可构造且 Tor 维数有限”; 右端是投射 2-极限 (*projective 2-limit*; 法: *2-limite projective*)。转移函子取为标量扩张

$$- \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^n}^L \mathbb{Z}/\ell^m.$$

必须限制在有限 Tor 维数的对象上, 才能保证这些函子把 D^b 映入 D^b 。

下列命题与 [3] 的有限性定理合用, 保证这样确实得到一个三角范畴。

命题 2.2.15. 设 $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是三角范畴的投射系, 转移函子

$$T_{m,n} : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_m$$

均为正合函子。若对每个 $n \in \mathbb{N}$ 及任意 $K, L \in \mathcal{D}_n$, 集合 $\mathrm{Hom}(K, L)$ 都有限, 则投射 2-极限 $\mathcal{D}$ 配上如下三角族后成为三角范畴: 一个三角属于该三角族, 当且仅当它在每个 $\mathcal{D}_n$ 中的像都是好三角。

证明. 设 $u : X \rightarrow Y$ 是 $\mathcal{D}$ 中的态射, $u_n : X_n \rightarrow Y_n$ 是它在 $\mathcal{D}_n$ 中的像。为验证 TR1, 对每个 n 选取以 u_n 为底的好三角 $\mathcal{T}_n$ 。在 $\mathcal{D}_n$ 中应用 TR3, 可构造以 u_n 上恒等自同构为底的三角态射

$$T_{n,n+1}(\mathcal{T}_{n+1}) \longrightarrow \mathcal{T}_n.$$

这些态射都是同构, 因而可取 $\mathcal{T}_n$ 的投射极限, 得到所需的好三角 $\mathcal{T}$ 。

再设 $\mathcal{D}$ 中有两个好三角 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$, 以及它们底之间的态射 f :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{(1)} & \longrightarrow \\ f_X \downarrow & & f_Y \downarrow & & & & \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \xrightarrow{(1)} & \longrightarrow \end{array}$$

对每个 n , 分别以 $\mathcal{T}_n, \mathcal{T}'_n, f_n$ 记 $\mathcal{T}, \mathcal{T}', f$ 在 $\mathcal{D}_n$ 中的像, 并令 H_n 为诱导 f_n 的三角态射 $\mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}'_n$ 所成的集合。函子 $T_{n,n+1}$ 把 H_{n+1} 映入 H_n , 而 $\varprojlim H_n$ 正是诱导 f 的三角态射 $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ 所成的集合。依假设, 每个 H_n 有限; 由 $\mathcal{D}_n$ 中的 TR3, 它又非空。因此 $\varprojlim H_n \neq \emptyset$, 这就验证了 $\mathcal{D}$ 中的 TR3。TR4 的验证相同, TR2 则显然成立。 $\square$

2.2.16

定义 (2.2.14.1) 的优点在于: $D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ 的六函子形式体系可直接取极限得到。自然 t -结构的定义则较为微妙, 因为 $D_c^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ 中的 $\tau_{\leq i}$ 不保持有限 Tor 维数, 也不与标量扩张交换。

定义函子

$$H^i : D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow \{X \text{ 上可构造 } \mathbb{Z}_\ell\text{-层}\}$$

如下: 若 K 由系统 $K_n \in D_{ctf}^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ 给出, 就令 $H^i(K)$ 为投射系 $(H^i(K_n))_n$ 所定义的 $\mathbb{Z}_\ell$ -层。以下把 K_n 记作

$$K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell}^L \mathbb{Z}/\ell^n.$$

有通常的短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^i(K) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^n &\longrightarrow H^i\left(K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell}^L \mathbb{Z}/\ell^n\right) \\ &\longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_\ell}(H^{i+1}(K), \mathbb{Z}/\ell^n) \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.2.16.1)$$

当 n 变化时, 这些正合列组成投射系, 而其中 Tor_1 项所成的投射系本质为零。

定义 $D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\leq 0}$ (相应地, $D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\geq 0}$) 为满足

$$H^i K = 0 \quad (i > 0) \quad (\text{相应地 } i < 0)$$

的对象所成的子范畴。要确认这确实是 t -结构, 关键在于构造截断函子 $\tau_{\leq i}$; 这一构造见 [1], 1.1.2。函子 H^0 给出范畴等价

$$D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\leq 0} \cap D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\geq 0} \xrightarrow{\sim} \{X \text{ 上可构造 } \mathbb{Z}_\ell\text{-层}\}.$$

由 (2.2.16.1), $K \in D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)^{\leq 0}$ 当且仅当对某个 (也就对每个) n ,

$$K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell}^L \mathbb{Z}/\ell^n \in D_c^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)^{\leq 0}.$$

O. Gabber 提出了一个不附加条件的良好定义。以 $\widehat{D}_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ 记由此得到的三角范畴。⁴⁸ 存在保守函子

$$\widehat{D}_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell),$$

它在同构类集合上是双射。若 $K, L \in \widehat{D}_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$, 模 ℓ^n 约化分别为 K_n, L_n , 则有短正合列⁴⁹

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 \mathrm{Hom}^{-1}(K_n, L_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, L) \longrightarrow \varprojlim \mathrm{Hom}(K_n, L_n) \longrightarrow 0.$$

设 $X = \mathrm{Spec} k$, $\bar{k}$ 是 k 的可分闭包, V 是带有 $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 连续作用的有限型 $\mathbb{Z}_\ell$ -模。若 K (相应地, L) 是仅在次数 0 非零的 $\mathbb{Z}_\ell$ (相应地, V), 则在 $\widehat{D}_c^b$ 中

$$\mathrm{Hom}^i(\mathbb{Z}_\ell, V) = H^i(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), V),$$

右端由连续上链复形计算。由于这一新定义尚未写出, 我们只得采用稍窄、但可应用 2.2.15 的框架。

⁴⁸据勘误第 33 条修正。

⁴⁹据勘误第 34 条修正。

2.2.17

令

$$D_{S,\mathcal{L}}^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$$

为 $D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ 的全子范畴，由满足下列任一等价条件的 K 组成；两条件的等价性来自 (2.2.16.1)：

(a) 对每个（相应地，某个） n ，

$$K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell}^L \mathbb{Z}/\ell^n \in D_{S,\mathcal{L}}^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n);$$

(b) 各 $H^i K \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell$ 都是 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ -可构造的。

当 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ 变化时， D_c^b 是这些 $D_{S,\mathcal{L}}^b$ 的滤过并。与 2.2.10 相同，先在 $D_{S,\mathcal{L}}^b$ 上粘合 t -结构，再对 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ 取极限，由此定义 D_c^b 上崴度 p 的 t -结构。

与 2.2.16 相同，

$$K \in {}^p D_c^{\leq 0}(X, \mathbb{Z}_\ell)$$

当且仅当它的模 ℓ 约化属于

$${}^p D_c^{\leq 0}(X, \mathbb{Z}/\ell).$$

2.2.18

回忆按定义

$$D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell) := D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell,$$

而可构造 $\mathbb{Q}_\ell$ -层所成的阿贝尔范畴，是可构造 $\mathbb{Z}_\ell$ -层范畴张量 $\mathbb{Q}_\ell$ 所得的范畴。全子范畴

$$D_{S,\mathcal{L}}^b(X, \mathbb{Q}_\ell),$$

即 $D_{S,\mathcal{L}}^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ 的像，由满足下列条件的 K 组成：每个 $H^i K$ 都可写成某个 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ -可构造 $\mathbb{Z}_\ell$ -层与 $\mathbb{Q}_\ell$ 的张量积。与前面一样，对 $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ 取极限并作粘合，定义 $D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 上崴度 p 的 t -结构。

对任意区间 $[a, b]$ ，自然函子

$${}^p D_c^{[a,b]}(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow {}^p D_c^{[a,b]}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

是等价。特别地，取 $a = b = 0$ ， $\mathbb{Q}_\ell$ -崴层所成的阿贝尔范畴由 $\mathbb{Z}_\ell$ -崴层范畴张量 $\mathbb{Q}_\ell$ 得到。

设 E_λ 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张， $\mathcal{O}_\lambda$ 是其赋值环。可像处理 $\mathbb{Z}_\ell$ -层那样处理 $\mathcal{O}_\lambda$ -层，再张量 E_λ 得到 E_λ -层。也可以直接由 $\mathbb{Q}_\ell$ -层出发：遗忘函子 ω 给出等价

$$D_c^b(X, E_\lambda) \xrightarrow{\sim} \{ K \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell), \\ \text{并配有 } \mathbb{Q}_\ell\text{-代数态射 } E_\lambda \rightarrow \text{End}(K) \}.$$

其全忠实性来自谱序列⁵⁰

$$E_2^{pq} = \text{Ext}_{E_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} E_\lambda}^p(E_\lambda, \text{Hom}^q(\omega K, \omega L)) \implies \text{Hom}(K, L). \quad (2.2.18.1)$$

这里 $p \neq 0$ 时 $E_2^{pq} = 0$; $\text{Hom}^q(\omega K, \omega L)$ 在 $D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 中计算。本质满性则来自如下事实: 若 K 带有 E_λ -作用, 则它是 $K \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} E_\lambda$ 的直和因子。

谱序列 (2.2.18.1) 可由 $D_c^b(X, \mathcal{O}_\lambda)$ 上的类似谱序列得到; 后一个谱序列由取极限构造。若 $\mathcal{O}_\lambda$ 在 $\mathbb{Z}_\ell$ 上平展, 仍有 $E_2^{pq} = 0$ 对 $p \neq 0$ 成立; 一般情形则未必。不过, 该谱序列仍说明遗忘函子给出全忠实函子

$$\{\mathcal{O}_\lambda\text{-崴层}\} \longrightarrow \{\text{带 } \mathcal{O}_\lambda\text{-作用的 } \mathbb{Z}_\ell\text{-崴层}\}.$$

它理应是等价, 但我们没有验证这一点。

最后, 对所有有限扩张 $E_\lambda \subset \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 取归纳极限, 得到 $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 。

2.2.19

在上述各种语境中, 2.2.2–2.2.8 及 2.2.12 的结论仍然成立, 证明实质相同。

不过, 2.1.23 关于崴层组成叠的证明不能原样照搬: 它所依据的 3.2 是在某个层范畴的导出范畴内部建立的。下面给出另一证明。如 2.1.23, 态射能够粘合, 这一点已经知道。还须证明: 若 $(U_i)_{i \in I}$ 是 X 的有限平展覆盖, 则 U_i 上任一配有粘合资料的崴层族 A_i , 都来自 X 上的一个崴层 A 。粘合资料使得: 对每个可经某个 U_i 分解的平展态射 $j: V \rightarrow X$, 可以在 V 上定义崴层 A_V , 并且这些定义与逆像 $V' \rightarrow V$ 相容。

设 $f: Y \rightarrow X$ 为任意态射, $S' \hookrightarrow X$ 是不可约局部闭子簇, 并有 Cartesian 方块

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{i'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

在导出范畴中有

$$i^! f_* = f'_* i'^!.$$

若 f 拟有限, 可在 S' 中取稠密开集 S , 使 $T = f^{-1}(S)$ 在 S 上有限, 并且或者为空, 或者纯维数为 $\dim S$ 。由此, f_* 把

$$D_c^{\geq p}(Y, \mathbb{Q}_\ell) \quad \text{映入} \quad D_c^{\geq p}(X, \mathbb{Q}_\ell).$$

因此

$${}^p f_* := {}^p H^0 f_*$$

是从 Y 上崴层到 X 上崴层的左正合函子, 其左伴随为

$${}^p f^* := {}^p H^0 f^*;$$

⁵⁰译者注: 原式的收敛项未写次数, 此处照录。按谱序列的总次数, 收敛项应为 $\text{Hom}^{p+q}(K, L)$ 。下文的全忠实性使用总次数 0 的结论。

参见 1.3.17 (iii)。

分别以 j_i 和 j_{ij} 记 $U_i \rightarrow X$ 与 $U_{ij} := U_i \times_X U_j \rightarrow X$ 的投影。置

$$A := \text{Ker} \left(\prod_{i \in I} {}^p j_{i*} A_{U_i} \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} {}^p j_{ij*} A_{U_{ij}} \right).$$

由伴随于 $A \rightarrow {}^p j_{i*} A_{U_i}$ 的态射得到

$${}^p j_i^* A \longrightarrow A_i = A_{U_i}.$$

只须证明它是同构；而这又只须在每个基变换 j_j 后验证。这里涉及的正像和逆像都与这种局部化交换，于是归结为覆盖中的某个 U_j/X 有截面的情形。此时，各 A_i 都是某个 A_X 的逆像；通常的同伦论证表明，两个彼此加细的开覆盖给出相同的 Čech 上同调，故 $A = A_X$ 。

3 补篇

3.1 滤过导出范畴、典范滤过与笨滤过

3.1.1

通常的三角范畴都有一个与之相伴的“滤过导出范畴”。起初的三角范畴与这个伴随范畴之间的关系尚未公理化。3.1.2 将介绍连接二者的若干最有用的函子，但并不企图列尽它们满足的所有相容关系。因此，本节必须从一个阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 、其导出范畴 $D(\mathcal{A})$ 及滤过导出范畴 $DF(\mathcal{A})$ 出发。

这里对 1.1.4 的定义略作修改： $DF(\mathcal{A})$ 是由带有限滤过的复形所成的范畴作分式演算得到的；这里要求整个滤过有限，而不只是逐次数有限。这正是 [8] V, §1, 2 的定义，读者可在那里找到系统论述。对 $D^*(\mathcal{A})$ ($* = +, -, b$)，相应的定义相同。我们还会偶尔使用双滤过导出范畴 (*bifiltered derived category*; 法: *catégorie dérivée bifiltrée*)

$$DF^2(\mathcal{A}),$$

它也可看作三角范畴 $DF(\mathcal{A})$ 所伴随的“滤过导出范畴”。

若阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象，则 $D^+(\mathcal{A})$ 可与由 $\mathcal{A}$ 中内射对象组成的左有界复形的同伦范畴等同。类似地， $DF^+(\mathcal{A})$ (相应地， $DF^{+2}(\mathcal{A})$) 可与如下范畴等同：对象是由 $\mathcal{A}$ 中内射对象组成的左有界滤过复形 (相应地，双滤过复形)，其滤过在每个次数都有限且可裂；态射是滤过复形态射模掉与滤过相容的同伦。换言之，模掉形如 $dH + Hd$ 的态射，其中 H 次数为 -1 ，并保持各滤过。关于 $DF^+(\mathcal{A})$ ，参见 [8] V, 1.4.7。

以下滤过有时递增，有时递减。两种记法按

$$F_i := F^{-i}$$

互相转换。

3.1.2

本段采用递减滤过。有如下连接 $D(\mathcal{A})$ 与 $DF(\mathcal{A})$ 的函子：

$$\mathrm{Gr}_F^i : DF(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A}), \quad (K, F) \longmapsto \mathrm{Gr}_F^i(K), \quad (3.1.2.1)$$

$$\text{遗忘滤过: } \omega : DF(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A}), \quad (K, F) \longmapsto K, \quad (3.1.2.2)$$

更一般地,

$$F^i/F^j : DF(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A}), \quad (K, F) \longmapsto F^i K / F^j K \quad (-\infty \leq i \leq j \leq \infty). \quad (3.1.2.3)$$

这些函子具有如下函子性。若 $(i, j) \geq (k, \ell)$, 则有

$$F^i/F^j \longrightarrow F^k/F^\ell,$$

并且对 $(i, j) \geq (k, \ell) \geq (m, n)$ 满足传递性。此外还有次数为 1 的态射

$$F^{-\infty}/F^i \xrightarrow{(1)} F^i;$$

对 $i \geq j$, 它们组成交换方块

$$\begin{array}{ccc} F^{-\infty}/F^i & \xrightarrow{(1)} & F^i \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^{-\infty}/F^j & \xrightarrow{(1)} & F^j. \end{array}$$

若 $i \geq j \geq k$, 则三角

$$(F^j/F^i, F^k/F^i, F^k/F^j)$$

是好三角; 其中次数为 1 的箭头是复合

$$F^k/F^j \longrightarrow F^{-\infty}/F^j \xrightarrow{(1)} F^j \longrightarrow F^j/F^i.$$

Verdier 仿照 Cartan–Eilenberg 中谱序列的构造, 把这样一套好三角称为 $D(\mathcal{A})$ 的一个谱对象 (*spectral object*; 法: *objet spectral*)。

反过来, 有函子

$$\begin{aligned} \text{平凡滤过: } D(\mathcal{A}) &\longrightarrow DF(\mathcal{A}), & \text{Gr}_{\text{Tr}}^0 K &= K, & \text{Gr}_{\text{Tr}}^i K &= 0 \ (i \neq 0). \\ K &\longmapsto (K, \text{Tr}), \end{aligned} \quad (3.1.2.4)$$

从 $DF(\mathcal{A})$ 到自身, 有

$$F^0 : DF(\mathcal{A}) \longrightarrow DF(\mathcal{A}), \quad (K, F) \longmapsto (F^0 K, \text{诱导滤过}). \quad (3.1.2.5)$$

更一般地, 令

$$\overline{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\},$$

则对每个递增连续映射 $\varphi : \overline{\mathbb{Z}} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$, 有

$$\begin{aligned} [\varphi] : DF(\mathcal{A}) &\longrightarrow DF(\mathcal{A}), \\ (K, F) &\longmapsto \left(\frac{F^{\varphi(-\infty)} K}{F^{\varphi(\infty)} K}, \left(\frac{F^{\varphi(n)} K}{F^{\varphi(\infty)} K} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right). \end{aligned} \quad (3.1.2.6)$$

若 $\varphi(n) = n + p$, 这就是

$$(K, F) \longmapsto (K, F[p]).$$

把“给定底可补成好三角”及 TR4 推广后, 可得:

命题 3.1.2.7. 设 $D(\mathcal{A})$ 中有态射列

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1} \longrightarrow K_n \longrightarrow \cdots \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

并且 $K_i = 0$ 对 $i \gg 0$ 成立, 而 $K_{i+1} \xrightarrow{\sim} K_i$ 对 $i \ll 0$ 成立. 则存在 $(K, F) \in DF(\mathcal{A})$, 使给定态射列同构于 $(F^i K)_{i \in \mathbb{Z}}$ 所成的态射列.

$DF^2(\mathcal{A})$ 与 $DF(\mathcal{A})$ 之间也有同样的关系, 而且可分别沿两个滤过来取. 例如有

$$F^i/F^j, \quad G^i/G^j : DF^2(\mathcal{A}) \longrightarrow DF(\mathcal{A}).$$

此外还有

$$\begin{aligned} \text{对角滤过: } \delta : DF^2(\mathcal{A}) &\longrightarrow DF(\mathcal{A}), \\ (K, F, G) &\longmapsto (K, \delta(F, G)), \end{aligned} \quad (3.1.2.8)$$

其中

$$\delta^p(F, G) = \sum_{i+j=p} (F^i \cap G^j) = \bigcap_{i+j=p+1} (F^i + G^j),$$

并且

$$\mathrm{Gr}_{\delta(F, G)}^p = \bigoplus_{i+j=p} \mathrm{Gr}_F^i \mathrm{Gr}_G^j. \quad (3.1.2.9)$$

3.1.3

设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的阿贝尔范畴. 对 $K \in DF(\mathcal{A})$ 与 $L \in DF^+(\mathcal{A})$, 有自然对象

$$R\mathrm{Hom}(K, L) \in DF(\mathbf{Ab}).$$

若 L 左有界, 且每个分量 L^j 的各滤过分次对象均为内射对象, 则 $R\mathrm{Hom}(K, L)$ 是通常滤过 Hom 复形 $\mathrm{Hom}(K, L)$ 在 $DF(\mathbf{Ab})$ 中的像. 具体地,

$$\mathrm{Hom}^n(K, L) = \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}(K^i, L^j),$$

而 $f = (f_i) \in \mathrm{Hom}^n(K, L)$ 属于 F^k , 当且仅当对任意 i, m 都有

$$f_i(F^m K^i) \subset F^{m+k} L^{i+n}.$$

于是

$$\mathrm{Gr}_F^k R\mathrm{Hom}(K, L) = \prod_{m-n=k} R\mathrm{Hom}(\mathrm{Gr}_F^n K, \mathrm{Gr}_F^m L) \quad ([8] \text{ V, 1.4.9}), \quad (3.1.3.1)$$

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(\omega K, \omega L) = H^0 \omega R\mathrm{Hom}(K, L), \quad (3.1.3.2)$$

以及

$$\mathrm{Hom}_{DF(\mathcal{A})}(K, L) = H^0 F^0 R\mathrm{Hom}(K, L) \quad ([8] \text{ V, 1.4.6}). \quad (3.1.3.3)$$

滤过复形 $R\mathrm{Hom}(K, L)$ 与 $F^0 R\mathrm{Hom}(K, L)$ 分别给出谱序列

$$E_1^{pq} = \prod_{j-i=p} \mathrm{Hom}^{p+q}(\mathrm{Gr}_F^i K, \mathrm{Gr}_F^j L) \implies \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}^{p+q}(\omega K, \omega L), \quad (3.1.3.4)$$

以及

$$E_1^{pq} = \begin{cases} \prod_{j-i=p} \mathrm{Hom}^{p+q}(\mathrm{Gr}_F^i K, \mathrm{Gr}_F^j L), & p \geq 0, \\ 0, & p < 0, \end{cases} \implies \mathrm{Hom}_{DF(\mathcal{A})}^{p+q}(K, L). \quad (3.1.3.5)$$

比较这两个谱序列, 便得到下面的 (i)。

命题 3.1.4. 设 (K, F) 、 (L, F) 如上。

(i) 假设当 $n = 0$ 或 -1 且 $i > j$ 时,

$$\mathrm{Hom}^n(\mathrm{Gr}_F^i K, \mathrm{Gr}_F^j L) = 0.$$

例如, 只要

$$\mathrm{Hom}^n(\mathrm{Gr}_F^i K[-i], \mathrm{Gr}_F^j L[-j]) = 0 \quad (n < 0),$$

上述假设便成立。此时自然映射

$$\mathrm{Hom}_{DF(\mathcal{A})}(K, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(\omega K, \omega L)$$

是同构。

(ii) 假设当 $n = 0$ 或 1 且 $n + i - j < 0$ 时,

$$\mathrm{Hom}^n(\mathrm{Gr}_F^i K, \mathrm{Gr}_F^j L) = 0.$$

例如, 只要

$$\mathrm{Hom}^n(\mathrm{Gr}_F^i K[i], \mathrm{Gr}_F^j L[j]) = 0 \quad (n < 0),$$

上述假设便成立。此时

$$\mathrm{Hom}_{DF(\mathcal{A})}(K, L) = E_2^{00} = \mathrm{Ker}(d_1 : E_1^{00} \rightarrow E_1^{10}).$$

证明. 对 (i), 应用三角

$$(F^0, \omega, F^{-\infty}/F^0)$$

以及谱序列

$$\tilde{E}_1^{pq} = \begin{cases} E_1^{pq}, & p < 0, \\ 0, & p \geq 0, \end{cases} \implies H^{p+q}((F^{-\infty}/F^0)R\mathrm{Hom}(K, L)).$$

由假设, 右端的 H^0 与 H^{-1} 都为零, 结论随即得到。对 (ii), 直接使用谱序列 (3.1.3.5)。

□

3.1.5

设 $\mathcal{A}$ 是有足够多内射对象的阿贝尔范畴, $\mathcal{D}$ 是 $D^+(\mathcal{A})$ 的严格全三角子范畴⁵¹,

$$(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$$

是 $\mathcal{D}$ 上的一个 t -结构。记

$$\mathcal{D}^b = \bigcup_{a \leq b} \mathcal{D}^{[a, b]}, \quad \mathcal{D}^{[a, b]} := \mathcal{D}^{\leq b} \cap \mathcal{D}^{\geq a},$$

并记其心为

$$\mathcal{C} := \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}.$$

为配合现代记号, 以下以

$$DF_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) \quad \text{及} \quad DF_{\mathcal{D}^b}(\mathcal{A})$$

分别表示 $DF^+(\mathcal{A})$ 的如下全子范畴: 对象是带有限滤过的 (K, F) , 并且各 $\text{Gr}_F^i K$ 分别属于 $\mathcal{D}$ 或 $\mathcal{D}^b$ 。

定义典范滤过时, 采用递增滤过更方便。若 $(K, T) \in DF_{\mathcal{D}^b}(\mathcal{A})$ 且 T 递增, 并且

$$(\text{Gr}_i^T K)[i] \in \mathcal{C} \quad (\forall i),$$

就称 (K, T) 是典范滤过复形 (*canonically filtered complex*; 法: *complexe filtré canonique*)。这等价于要求: $T_i K$ 连同自然态射 $T_i K \rightarrow K$, 可与

$${}^p\tau_{\leq i} K \longrightarrow K$$

等同。此时

$${}^p H^i K = (\text{Gr}_i^T K)[i].$$

命题 3.1.6. 从 $DF_{\mathcal{D}^b}(\mathcal{A})$ 中典范滤过复形所成的范畴 $DF_{\text{can}}(\mathcal{D}^b)$ 到 $\mathcal{D}^b$ 的遗忘滤过函子

$$\omega : DF_{\text{can}}(\mathcal{D}^b) \longrightarrow \mathcal{D}^b$$

是范畴等价。

证明. 由 3.1.4 (i) 及

$$\text{Hom}^n(A, B) = 0 \quad (n < 0, A, B \in \mathcal{C}),$$

立即得到 ω 全忠实。把 (3.1.2.7) 应用于态射列 $({}^p\tau_{\leq i} K)_i$, 便得到本质满性。□

⁵¹据勘误第 35 条修正。

3.1.7

我们要定义函子

$$D^b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}^b.$$

办法是把 $\mathcal{C}$ 中对象组成的有界复形，与一类特殊的滤过复形等同起来，这类对象称为笨滤过复形 (*stupidly filtered complex*; 法: *complexe filtré bête*)。定义时采用递减滤过更方便。

若 $(K, F) \in DF_{\mathcal{D}^b}(\mathcal{A})$, F 递减, 并且

$$(\mathrm{Gr}_F^i K)[i] \in \mathcal{C} \quad (\forall i),$$

就称 (K, F) 是笨滤过复形。

现取 $(K, F) \in DF_{\mathcal{D}^b}(\mathcal{A})$, 置

$$K^i := (\mathrm{Gr}_F^i K)[i].$$

好三角

$$(\mathrm{Gr}_F^{i+1} K, F^i K / F^{i+2} K, \mathrm{Gr}_F^i K)$$

给出次数为 1 的态射

$$\mathrm{Gr}_F^i K \xrightarrow{(1)} \mathrm{Gr}_F^{i+1} K,$$

也就是态射

$$d^i : K^i \longrightarrow K^{i+1}.$$

三角态射

$$\begin{array}{ccccc} F^{i+1}K / F^{i+3}K & \longrightarrow & F^iK / F^{i+3}K & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_F^i K \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathrm{Gr}_F^{i+1} K & \longrightarrow & F^iK / F^{i+2}K & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_F^i K \end{array}$$

表明上述次数为 1 的态射经 $F^{i+1}K / F^{i+3}K$ 分解。因此

$$d^{i+1}d^i = 0.$$

于是得到函子

$$G : DF_{\mathcal{D}^b}(\mathcal{A}) \longrightarrow C^b(\mathcal{D}), \quad (K, F) \longmapsto (K^\bullet, d^\bullet).$$

命题 3.1.8. 函子 G 在笨滤过复形所成的范畴上诱导范畴等价

$$G : DF_{\mathrm{st}}(\mathcal{D}^b) \xrightarrow{\sim} C^b(\mathcal{C}).$$

证明. 由 3.1.4 (ii) 以及

$$\mathrm{Hom}^n(A, B) = 0 \quad (n < 0, A, B \in \mathcal{C}),$$

立即得到 G 全忠实。事实上, 若 $K, L \in DF_{\text{st}}(\mathcal{D}^b)$, 则

$$\text{Hom}_{DF(\mathcal{A})}(K, L) = \text{Ker} \left(\prod_i \text{Hom}(K^i, L^i) \xrightarrow{d_1} \prod_i \text{Hom}(K^i, L^{i+1}) \right).$$

这里

$$d_1(f) = df - fd$$

(我们只需知道这个公式至多相差一个符号; 验证留给读者)。所以 $\text{Hom}_{DF(\mathcal{A})}(K, L)$ 正好等同于从复形 $K^\bullet$ 到 $L^\bullet$ 的复形态射群。

下面证明本质满。给定 $\mathcal{C}$ 中对象组成的有界复形

$$0 \longrightarrow K^a \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^b \longrightarrow 0 \quad (a \leq b),$$

我们要找一个被 G 映到它的笨滤过复形 (K, F) 。

第一种构造。把每个 K^i 表示成 $D^+(\mathcal{A})$ 中一个由内射对象组成的左有界复形

$$(K^{i,j}, d'')$$

的像, 并把态射 $d^i : K^i \rightarrow K^{i+1}$ 实现为复形态射 d^i 。任何具有下列形式的滤过复形 X 都能解决问题:

$$X^n = \bigoplus_{i+j=n} K^{i,j}, \quad F^p X^n = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i \geq p}} K^{i,j},$$

其微分为⁵²

$$d = (-1)^i d'' + d' + r,$$

其中 r 的滤过次数至少为 2, 也就是说

$$rF^p \subset F^{p+2}.$$

置

$$H_0 = (-1)^i d'', \quad H_1 = d',$$

并归纳寻找双齐次次数为 $(p, -p+1)$ 的 H_p , 使

$$d_p := \sum_{n=0}^p H_n$$

满足

$$d_p^2 \text{ 的滤过次数至少为 } p+1. \quad (*)$$

当 $p=1$ 时条件已经成立, 因为每个 d^i 都是复形态射。当 $p \geq b-a$ 时, 条件 $(*)$ 蕴含 $d_p^2 = 0$; 于是取 $d = d_p$ 即得所求复形。

先构造 H_2 。依假设,

$$d'^{i+1} d'^i : K^{i,\bullet} \longrightarrow K^{i+2,\bullet}$$

⁵²据勘误第 36 条修正。

在导出范畴中为零，因而零伦。取 H_2^i 使

$$d'^{i+1}d'^i = d''H_2^i + H_2^id'',$$

则可取

$$H_2 = \sum_i (-1)^{i+1} H_2^i;$$

验证留给读者。

设 $p \geq 2$ ，并假设已构造 $H_0, \dots, H_p$ 。令 φ 为 d_p^2 中第一滤过次数等于 $p+1$ 的分量。比较恒等式

$$d_p(d_p^2) = (d_p^2)d_p$$

两边第一滤过次数为 $p+1$ 的分量，得到

$$d''\varphi + (-1)^p\varphi d'' = 0.$$

因此 φ 是一族次数为 $1-p$ 的复形态射

$$\varphi^i : K^{i,\bullet} \longrightarrow K^{i+p+1,\bullet}.$$

由于对 $A, B \in \mathcal{C}$ 及 $n < 0$ 有 $\text{Hom}^n(A, B) = 0$ ，存在次数为 $-p$ 的 H_{p+1}^i ，使

$$\varphi^i = d''H_{p+1}^i + (-1)^{1-p}H_{p+1}^id''.$$

于是可取

$$H_{p+1} = \sum_i (-1)^{i+p} H_{p+1}^i.$$

归纳由此完成。

第二种构造（梗概）。它实质上与第一种相同，只是改用一种不显式提及“从阿贝尔范畴的导出范畴出发”的语言；这一事实隐藏在若干相容性的验证中，这里不再证明。

对 $b-a$ 作归纳。若 $b=a$ ，取平凡滤过即可。若 $a < b$ ，选择 $a \leq p < b$ ，并考虑由原复形微分给出的两个截断复形之间的态射（靶中的 K^b 位于次数 b ）

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K^a & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & K^p \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & K^{p+1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow K^b \longrightarrow 0. \end{array}$$

归纳假设分别用于它的源与靶；再由 G 的全忠实性，得到

$$\tilde{f} : (A, F) \longrightarrow (B, F), \quad f = \text{Gr}(\tilde{f}).$$

记 $F[n]$ 为平移后的滤过

$$F[n]^i := F^{n+i}$$

（见 3.1.2.6）。在 $DF(\mathcal{A})$ 中取复合态射

$$(A, F[1]) \xrightarrow{\text{id}_A} (A, F) \xrightarrow{\tilde{f}} (B, F)$$

的锥，即得所求笨滤过复形。

□

3.1.9

称函子

$$\text{real} := \omega G^{-1} : C^b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}^b$$

为实现函子 (*realization functor*; 法: *foncteur de réalisation*)。它把 $\mathcal{C}$ 中对象组成的每个有界复形 $K^\bullet$, 映到如下对象: 先取一个被 G 映为 $K^\bullet$ 的笨滤过复形 (K, F) , 再遗忘其滤过。也就是说, 有交换图

$$\begin{array}{ccc} DF_{\text{st}}(\mathcal{D}^b) & \xrightarrow{\sim G} & C^b(\mathcal{C}) \\ & \searrow \omega & \downarrow \text{real} \\ & & \mathcal{D}^b. \end{array} \quad (3.1.9.1)$$

若 (K, F) 是笨滤过复形, 则 $(K[1], F[1])$ 也是笨滤过复形, 并有

$$(\text{Gr}_{F[1]}^i K[1])[i] = (\text{Gr}_F^{i+1} K)[i+1]. \quad (3.1.9.2)$$

同构 (3.1.9.2) 使下图反交换:

$$\begin{array}{ccc} (\text{Gr}_{F[1]}^i K[1])[i] & \xrightarrow{d} & (\text{Gr}_{F[1]}^{i+1} K[1])[i+1] \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ (\text{Gr}_F^{i+1} K)[i+1] & \xrightarrow{d} & (\text{Gr}_F^{i+2} K)[i+2]. \end{array}$$

换言之, 它们给出同构

$$G(K[1], F[1]) \xrightarrow{\sim} (GK)[1],$$

从而得到自然同构

$$\text{real}(K^\bullet[1]) \xrightarrow{\sim} (\text{real } K^\bullet)[1]. \quad (3.1.9.3)$$

命题 3.1.10. 带有分次结构 (3.1.9.3) 的函子

$$\text{real} : C^b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}^b$$

可经由一个正合函子分解; 后者仍记作

$$\text{real} : D^b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}^b.$$

引理 3.1.11. 函子

$$\text{real} : C^b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}^b$$

可经由 $K^b(\mathcal{C})$ 分解。

证明. 设 $K^\bullet, L^\bullet \in C^b(\mathcal{C})$, 并设它们分别是 $DF_{\text{st}}(\mathcal{D}^b)$ 中 (K, F) 、 (L, F) 在 G 下的像。引理来自下列交换图；它是谱序列态射 (3.1.3.5) $\rightarrow$ (3.1.3.4) 中的一部分：

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{C^b(\mathcal{C})}(K^\bullet, L^\bullet) & \xrightarrow[\text{3.1.4(ii)}]{\sim} & \text{Hom}_{DF(\mathcal{A})}((K, F), (L, F)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{K^b(\mathcal{C})}(K^\bullet, L^\bullet) & \longrightarrow & \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(K, L). \end{array}$$

这里上、下两行的左端，分别等同于 (3.1.3.5) 与 (3.1.3.4) 的 $E_2^{0,0}$ 项。于是零伦态射在 real 下变为零，故 real 通过 $K^b(\mathcal{C})$ 分解。 $\square$

引理 3.1.12. 函子

$$\text{real} : K^b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}^b$$

把好三角变为好三角。

证明. 设

$$f : (K, F) \longrightarrow (L, F)$$

是 $DF(\mathcal{A})$ 中的滤过复形态射。在 f 的锥 $C(f)$ 上定义滤过 $\tilde{F}$ ：

$$\tilde{F}^i C(f)^m = F^i L^m \oplus F^{i+1} K^{m+1}.$$

于是 $(C(f), \tilde{F})$ 是复合态射

$$(K, F[1]) \longrightarrow (K, F) \xrightarrow{f} (L, F)$$

的锥。自然同构

$$\text{Gr}_{\tilde{F}}^i C(f) \xrightarrow{\sim} (\text{Gr}_F^{i+1} K)[1] \oplus \text{Gr}_F^i L$$

给出同构

$$G(C(f), \tilde{F}) \xrightarrow{\sim} C(G(f)).$$

特别地，若 (K, F) 与 (L, F) 都是笨滤过复形，则 $(C(f), \tilde{F})$ 也是笨滤过复形；而

$$C(\omega f) = \omega C(f)$$

可与 $\text{real}(C(G(f)))$ 等同。更准确地说，自然好三角

$$(K, L, C(f))$$

可与下列好三角在 real 下的像等同：

$$(G(K), G(L), C(G(f))).$$

这就证明了引理。 $\square$

引理 3.1.13. 设

$$\Sigma : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

是 $\mathcal{C}$ 中的短正合列，并把它看作集中在次数 $0, 1, 2$ 的复形。则

$$\text{real}(\Sigma) = 0.$$

证明. 可用 $\mathcal{A}$ 中对象组成的复形短正合列

$$\Sigma^\bullet: A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet$$

表示 Σ 。把 $\Sigma^\bullet$ 看成双复形，其中 $A^\bullet, B^\bullet, C^\bullet$ 的第一次数依次为 $0, 1, 2$ 。其相伴的链复形⁵³ $s\Sigma^\bullet$ 按第一次数滤过后是笨滤过复形，且其分次复形为 Σ 。因而

$$s\Sigma^\bullet \xrightarrow{\sim} \text{real}(\Sigma).$$

另一方面， $s\Sigma^\bullet$ 的各行都零调，所以它本身零调；结论随即得到。 $\square$

3.1.14 构造同构 $H^i \simeq {}^p H^i \text{ real}$

设 $K^\bullet \in C^b(\mathcal{C})$ 。截断 $\tau_{\leq i} K^\bullet$ 定义为

$$(\tau_{\leq i} K^\bullet)^j = \begin{cases} K^j, & j < i, \\ \text{Ker}(d^i), & j = i, \\ 0, & j > i. \end{cases}$$

另定义 $\tau'_{\leq i} K^\bullet$:

$$(\tau'_{\leq i} K^\bullet)^j = \begin{cases} K^j, & j \leq i, \\ \text{Im}(d^i), & j = i+1, \\ 0, & j > i+1. \end{cases}$$

包含态射

$$\tau_{\leq i} K^\bullet \longrightarrow \tau'_{\leq i} K^\bullet$$

的锥同伦等价于集中在次数 $i-1, i, i+1$ 的复形

$$\text{Ker}(d^i) \longrightarrow K^i \longrightarrow \text{Im}(d^i).$$

由 3.1.13，后一复形的实现为零；再由 3.1.12，态射

$$\text{real}(\tau_{\leq i} K^\bullet) \longrightarrow \text{real}(\tau'_{\leq i} K^\bullet)$$

是同构。

下面构造一个同构，把态射

$$\text{real}(\tau_{\leq i-1} K^\bullet) \longrightarrow \text{real}(\tau_{\leq i} K^\bullet)$$

⁵³译者注：法语原文为 *complexe simple*，意为和双复形相对应的单个链复形，即双复形的总复形。

的锥与 $H^i K^\bullet[-i]$ 等同。这将同时证明 $\text{real}(\tau_{\leq i} K^\bullet)$ 可与 ${}^p\tau_{\leq i}(\text{real } K^\bullet)$ 等同，并把 $H^i K^\bullet$ 与 ${}^pH^i(\text{real } K^\bullet)$ 等同。

可用 $\tau'_{\leq i-1} K^\bullet$ 代替 $\tau_{\leq i-1} K^\bullet$ 。由 1.3.12⁵⁴，所求的锥就是态射

$$\tau'_{\leq i} K^\bullet \longrightarrow \tau_{\leq i} K^\bullet$$

之锥的实现。⁵⁵该锥同伦等价于集中在次数 $i-1, i$ 的复形

$$\text{Im}(d^{i-1}) \longrightarrow \text{Ker}(d^i),$$

也就是态射

$$\text{Im}(d^{i-1})[i] \longrightarrow \text{Ker}(d^i)[i]$$

的锥。⁵⁶因此，它的实现是同一态射在 $\mathcal{D}^b$ 中的一个锥。由 1.2.3，这个锥在唯一同构意义下唯一，正是

$$H^i K^\bullet[i].$$

3.1.15 命题 3.1.10 证明的结束

还须证明：若 $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ 是拟同构，则 $\text{real}(f)$ 是 $\mathcal{D}^b$ 中的同构。函子族

$${}^pH^i: \mathcal{D}^b \longrightarrow \mathcal{C}$$

是保守的 (1.3.7)，故只须验证各 ${}^pH^i \text{real}(f)$ 均为同构。3.1.14 的同构把它们等同于 $H^i(f)$ ，而后者由假设均为同构。命题 3.1.10 得证。

命题 3.1.16. 函子

$$\text{real}: D^b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}^b$$

为范畴等价，当且仅当下列条件成立：任取 $A, B \in \mathcal{C}$ 、 $n > 0$ 及

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[n]),$$

都存在 $\mathcal{C}$ 中的单态射 $B \hookrightarrow B'$ ，使 f 在 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B'[n])$ 中的像为零。

证明。固定 A ，考虑关于 B 的 δ -函子态射

$$\text{real}: \text{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(A, B[n]) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[n]).$$

左端是 $\mathcal{C}$ 中的 Yoneda $\text{Ext}^n(A, B)$ 。它们由下列性质刻画： $n < 0$ 时为零， $n = 0$ 时等于 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ，而 $n > 0$ 时具有 3.1.16 所述的可消去性。因此，3.1.16 的条件等价于：对任意 $A, B \in \mathcal{C}$ 与 $n \in \mathbb{Z}$ ，自然映射

$$\text{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(A, B[n]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[n])$$

⁵⁴译者注：原文此处引作 1.3.12；依前文，应参见 3.1.12。

⁵⁵译者注：原文在此式的源写作 $\tau'_{\leq i} K^\bullet$ 。依上一句的替换，源应为 $\tau'_{\leq i-1} K^\bullet$ ；此时才有下述自然态射及其锥。

⁵⁶译者注：原文此处及下文均写作 $[i]$ 。按复形移位约定，次数 i 处的对象应写作 $A[-i]$ 。因此这里两个 $[i]$ 应理解为 $[-i]$ ；下文锥的对象应为 $H^i K^\bullet[-i]$ ，与本段开头一致。

都是同构。由于 $D^b(\mathcal{C})$ 的每个对象都可从 $\mathcal{C}$ 中对象由剥离论证得到，这便推出 real 全忠实。

还须证明：若 real 全忠实，则它本质满。对 $\ell = b - a$ 作归纳，证明 $\mathcal{D}^{[a,b]}$ 中每个对象都属于其实质像。当 $\ell = 0$ 时， $\mathcal{C}[a]$ 显然在其实质像中。⁵⁷当 $\ell \geq 1$ 时，取 $a \leq c < b$ 。每个 $K \in \mathcal{D}^{[a,b]}$ 都给出好三角

$$({}^p\tau_{\leq c}K, K, {}^p\tau_{> c}K).$$

由归纳假设，首尾两项都在 real 的实质像中。再由全忠实性，次数为 1 的箭头

$$d: {}^p\tau_{> c}K \longrightarrow ({}^p\tau_{\leq c}K)[1]$$

可写成 $\text{real}(\delta)$ ；于是 $K[1]$ 同构于 δ 的一个锥在 real 下的像。故 K 也在其实质像中。
□

注记 3.1.17.

(i) 若对 $A, B \in \mathcal{C}$ 及 $n < N$ ，映射

$$\text{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(A, B[n]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[n])$$

都是同构，则有单射

$$\text{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(A, B[N]) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[N]).$$

其像恰由这样的 f 组成：存在 $\mathcal{C}$ 中的满态射 $A' \twoheadrightarrow A$ 与单态射 $B \hookrightarrow B'$ ，使 f 在 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A', B'[N])$ 中的像为零。

(ii) 对 $n \leq 1$ ，总有同构

$$\text{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(A, B[n]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[n]).$$

$n \leq 0$ 的情形显然； $n = 1$ 则来自 $\mathcal{C}$ 对扩张稳定。事实上，每条次数为 1 的箭头 $d: A \xrightarrow{(1)} B$ 都是某个好三角

$$B \xrightarrow{b} E \xrightarrow{a} A \xrightarrow{d} B[1]$$

的末箭头，而满态射 $a: E \twoheadrightarrow A$ 与单态射 $b: B \hookrightarrow E$ 都使 d 的相应像为零。

3.2 局部化

3.2.1

设 S 是一个带有环层 $\mathcal{O}$ 的景 (*site*; 法: *site*)。为简单起见，假设 S 中存在有限逆极限 (*finite inverse limit*; 法: *limite projective finie*)，并以 s 表示一个终对象

⁵⁷译者注：原文写作 $\mathcal{C}[a]$ 。由 $\mathcal{D}^{[a,a]} = \mathcal{C}[-a]$ ，本归纳步实际使用的是 $\mathcal{C}[-a]$ 。两者都在实现函子的实质像中。

(*terminal object*; 法: *objet final*)。对每个 $U \in \text{Ob } S$, 记 $D(U)$ 为 U 上 $\mathcal{O}$ -模层所成阿贝尔范畴的导出范畴 (也就是景 $S|U$ 上 $\mathcal{O}$ -模层的导出范畴)。对 S 中的态射 $f: V \rightarrow U$, 有“逆像”函子

$$f^*: D(U) \longrightarrow D(V).$$

若 $K \in D(U)$ 、 $L \in D(V)$, 所谓从 K 到 L 的 f -态射 (f -*morphism*; 法: f -*morphisme*), 是指一个态射

$$f^*K \longrightarrow L.$$

一般说来, 诸 $D(U)$ 并不构成 S 上的叠: 导出范畴 $D(S)$ 的对象和态射都不具有 S 上的局部性。不过, 有如下结论。

命题 3.2.2. 设 $K \in D^-(S)$ 、 $L \in D^+(S)$, 并假设层 $\mathcal{E}xt^i(K, L)$ 在 $i < 0$ 时为零。则预层

$$U \longmapsto \text{Hom}_{D(U)}(K|_U, L|_U)$$

事实上是一个层。

证明. 局部到整体谱序列

$$E_2^{pq} = H^p(S, \mathcal{E}xt^q(K, L)) \implies \text{Ext}^{p+q}(K, L)$$

给出同构

$$\text{Hom}_{D(S)}(K, L) \xrightarrow{\sim} H^0(S, \mathcal{H}om(K, L)).$$

把 S 换成 S 中任意对象 U , 同一公式仍然成立, 命题随即得证。□

3.2.3

本节的目标是补充上述结果: 在负次数 $\mathcal{E}xt^i$ 适当消失的假设下, 只须局部给出一个 $D^b(S)$ 的对象, 就确实能够得到一个整体对象。

设 C 是 S 中覆盖终对象 s 的一个覆盖筛 (*covering sieve*; 法: *crible couvrant*)。所谓一个 C -局部给定的 $D(S)$ 对象, 是指如下资料:

- 对每个 $U \in C$, 给定 $K_U \in D(U)$;
- 对 C 中对象之间的每个态射 $v: V \rightarrow U$, 给定从 K_U 到 K_V 的 v -态射 φ_v , 即一个同构

$$\varphi'_v: v^*K_U \xrightarrow{\sim} K_V.$$

还要求对任意可复合的态射 v, w , 都有

$$\varphi_{vw} = \varphi_w \varphi_v.$$

若 $K \in D(S)$, 则它在各 $U \in C$ 上的限制 $K|_U$ 构成一个 C -局部给定的 $D(S)$ 对象。反过来, 有:

定理 3.2.4. 设 (K_U) 是一个 C -局部给定的 $D(S)$ 对象, 并且存在一个与 U 无关的区间, 使

$$H^i K_U = 0$$

在 i 位于该区间之外时成立。再假设对每个 $U \in C$, 在 U 上都有

$$\mathcal{E}xt^i(K_U, K_U) = 0 \quad (i < 0).$$

则存在 $K \in D^b(S)$, 其限制给出 (K_U) ; 由 3.2.2, 这样的 K 在唯一同构意义下唯一。

58

这一定理说明, 对偶化对象 (*dualizing object*; 法: *objet dualisant*) (例如凝聚层语境中的对偶化对象) 具有局部性。⁵⁹

唯一性由 3.2.2 得到。为证明存在性, 我们将借鉴 3.1.8 的证明以及 上同调下降理论 (*cohomological descent theory*; 法: *théorie de la descente cohomologique*) (SGA 4 VI B; [2] §5 给出了概要)。

3.2.5 问题的单纯形式

在不改变拓扑斯的前提下更换景后, 可以假设覆盖筛 C 由 S 中一个覆盖终对象的对象 U 生成。于是, C -局部给出一个 $D(S)$ 对象, 等价于: 给出一个 $D(U)$ 的对象, 并给出它在

$$U \times_s U$$

上的两个逆像之间的同构, 使之在 $U \times_s U \times_s U$ 上满足通常的 余循环条件 (*cocycle condition*; 法: *condition de cocycle*)。

对 $n \geq -1$, 令 $\Delta_n = [0, n] \subset \mathbb{N}$, 并考虑幂 U^{Δ_n} ($n \geq 0$) 组成的单纯系统。这里只使用其底层的严格单纯系统 (*strict simplicial system*; 法: *système simplicial strict*), 也就是略去退化映射 (*degeneracy map*; 法: *dégénérescence*)。所谓诸 $D(U^{\Delta_n})$ 中对象 K^n 组成的严格单纯系统, 是指下列资料:

- 对每个 $n \geq 0$, 给定 $K^n \in D(U^{\Delta_n})$;
- 对每个递增单射 $\alpha: \Delta_n \hookrightarrow \Delta_m$, 它诱导投影

$$p(\alpha): U^{\Delta_m} \longrightarrow U^{\Delta_n},$$

并给定从 K^n 到 K^m 的 $p(\alpha)$ -态射 $\varphi(\alpha)$, 即态射

$$\varphi(\alpha)': p(\alpha)^* K^n \longrightarrow K^m.$$

要求

$$\varphi(\text{Id}) = \text{Id}, \quad \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta),$$

也就是说,

$$\varphi(\alpha\beta)' = \varphi(\alpha)' \circ p(\alpha)^* (\varphi(\beta)').$$

如果所有 $\varphi(\alpha)'$ 都是同构, 就称这个严格单纯系统是 笛卡尔的 (*cartesian*; 法: *cartésien*)。

因此, C -局部给出一个 $D(S)$ 对象, 也等价于给出诸 $D(U^{\Delta_n})$ 中对象组成的一个笛卡尔严格单纯系统。我们须证明: 若这样的系统 $K^\bullet$ 满足

⁵⁸ 据勘误第 38 条修正。

⁵⁹ 据勘误第 37 条修正。

(a) 当 $|i|$ 充分大时, $H^i K^0 = 0$;

(b) 在 U 上,

$$\mathcal{E}xt^i(K^0, K^0) = 0 \quad (i < 0),$$

则 $K^\bullet$ 来自某个 $K \in D^b(S)$ 的限制。经过若干单纯方法的准备后, 3.2.18 将给出证明。

3.2.6

以 (Δ) 表示如下范畴: 对象是有限集

$$\Delta_n = [0, n] \quad (n \geq -1),$$

态射是它们之间的递增单射; 以 $(\Delta)^+$ 表示由 $n \geq 0$ 的 Δ_n 所成的全子范畴。设 $\mathcal{A}$ 是 (Δ) 上一个同时 纤维化 (*fibred*; 法: *fibrée*) 与 余纤维化 (*cofibred*; 法: *cofibrée*) 的范畴, $\mathcal{A}^+$ 是它在 $(\Delta)^+$ 上的逆像。对 (Δ) 中的箭头 $\alpha: \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, 置

$$s(\alpha) = n, \quad b(\alpha) = m,$$

并以 $\mathcal{A}(n)$ 表示 $\mathcal{A}$ 在 Δ_n 上的纤维。

我们所关心的情形是: $\mathcal{A}(n)$ 为 U^{Δ_n} 上 $\mathcal{O}$ -模层的范畴。着眼于这个情形, 对任意 $\alpha: \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, 把一对伴随函子记为

$$(p(\alpha)^*, p(\alpha)_*), \quad \text{或简记为} \quad (\alpha^*, \alpha_*),$$

使得

$$\text{Hom}_\alpha(F, G) = \text{Hom}_{\mathcal{A}(m)}(p(\alpha)^* F, G) = \text{Hom}_{\mathcal{A}(n)}(F, p(\alpha)_* G).$$

假设各 $\mathcal{A}(n)$ 都是加性范畴, 且 $p(\alpha)^*, p(\alpha)_*$ 都是加性函子。

由 (Δ) 上的范畴 $\mathcal{A}$, 可导出一列 (Δ) 上的范畴 (限制后也可视为 $(\Delta)^+$ 上的范畴), 其纤维依次为

$$C(\mathcal{A}(n)), \quad K(\mathcal{A}(n)), \quad \dots$$

设 $\mathcal{B}$ 是 $(\Delta)^+$ 上的范畴, 结构函子为 $\pi: \mathcal{B} \rightarrow (\Delta)^+$. $\mathcal{B}$ 在 $(\Delta)^+$ 上的一个 截面 (*section*; 法: *section*), 也就是诸纤维范畴 $\mathcal{B}(n)$ 中对象组成的一个严格单纯系统, 是满足

$$\pi \circ \sigma = \text{Id}$$

的函子 $\sigma: (\Delta)^+ \rightarrow \mathcal{B}$ 。换言之, 它由一族对象

$$B_n \in \text{Ob } \mathcal{B}(n)$$

及箭头 $\varphi(\alpha)$ 组成; 对 $\alpha: \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, $\varphi(\alpha)$ 是从 B_n 到 B_m 的一条 α -箭头,⁶⁰并且

$$\varphi(\text{Id}_{\Delta_n}) = \text{Id}_{B_n}, \quad \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta).$$

若 $\mathcal{B}$ 在 $(\Delta)^+$ 上余纤维化, 则给定这些 $\varphi(\alpha)$ 等价于在 $\mathcal{B}(m)$ 中给定态射

$$\varphi(\alpha)': p(\alpha)^* B_n \longrightarrow B_m.$$

当所有 $\varphi(\alpha)'$ 都是同构时, 称截面 $B_\bullet$ 是笛卡尔的; 也有作者称之为余笛卡尔的 (*co-cartesian*; 法: *cocartésien*)。

⁶⁰据勘误第 39 条修正。

3.2.7

定义加性范畴 $\text{tot}(\mathcal{A}^+)$ 如下:

对象: 族 $(A^n)_{n \geq 0}$, 其中 $A^n \in \mathcal{A}(n)$;

箭头:

$$\text{Hom}((A^n), (B^n)) = \prod_{\alpha} \text{Hom}_{\alpha}(A^{s(\alpha)}, B^{b(\alpha)});$$

复合:

$$((f) \circ (g))_{\alpha} = \sum_{\alpha = \beta\gamma} f_{\beta} \circ g_{\gamma}.$$

这里乘积取遍 $(\Delta)^+$ 的所有箭头 α 。把 $\mathcal{A}^+$ 等同于 $\text{tot}(\mathcal{A}^+)$ 的如下子范畴: 若 $A \in \mathcal{A}(n)$, 就把 A 映到族 (A^i) , 其中

$$A^n = A, \quad A^m = 0 \quad (m \neq n).$$

3.2.8

下面描述 $\text{tot}(\mathcal{A}^+)$ 中对象组成的复形 (K, d) 。按定义, K 的每个分量 K^i 是由 $\mathcal{A}(j)$ 中对象组成的族 $(K^i)^j$ 。重新编号, 置

$$K^{n,m} := (K^{n+m})^n.$$

对 $\alpha: \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, 以 $d(\alpha)$ 表示 d 的 α -分量; 它是一族 α -态射

$$K^{n,p} \longrightarrow K^{m,p+n-m+1},$$

也就是说, 是从 $K^{n,\bullet}$ 到 $K^{m,\bullet}$ 的一个次数为 $n - m + 1$ 的 α -映射 (α -mapping; 法: α -application)。

在 K 上定义递减滤过 L :

$$(L^p K)^{n,m} = \begin{cases} 0, & n < p, \\ K^{n,m}, & p \leq n, \end{cases}$$

并置

$$(K^{n,\bullet}, d'') := (\text{Gr}_L^n K)[n].$$

这是 $\mathcal{A}(n)$ 中的复形, 其分量为 $K^{n,m}$, 微分为 $(-1)^n d(\text{Id}_{\Delta_n})$ 。

对每个面态射 (*face morphism*; 法: *morphisme de face*) $\partial_i: \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$, 置

$$\partial_i^* = (-1)^i d(\partial_i).$$

这些 ∂_i^* 是复形之间的 ∂_i -态射

$$K^{n,\bullet} \longrightarrow K^{n+1,\bullet}.$$

对 $0 \leq i < j \leq n+2$, 两个 $\partial_j \partial_i$ -态射

$$\partial_j^* \partial_i^*, \quad \partial_i^* \partial_{j-1}^*$$

彼此同伦; 一个同伦由 $\pm d(\partial_j \partial_i)$ 给出。

更一般地, 对每个 $\alpha: \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, 等式 $d^2 = 0$ 给出

$$\sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta)d(\gamma) = 0. \quad (3.2.8.1)$$

以下以 $\sum'$ 表示不允许指标为恒等映射的求和。若 $m > n$, 恒等式 (3.2.8.1) 可改写为

$$\sum'_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta)d(\gamma) = (-1)^{m+1}(d''d(\alpha) + (-1)^{m-n}d(\alpha)d''). \quad (3.2.8.2)$$

它表明, 左端之和是一个次数为 $n-m+1$ 的复形 α -态射, 并由同伦 $(-1)^{m+1}d(\alpha)$ 零伦。⁶¹

反过来, 设给定一族复形

$$K^{n,\bullet} \in \text{Ob } C(\mathcal{A}(n)) \quad (n \geq 0)$$

以及对 $(\Delta)^+$ 中每条箭头 α 给定的 $d(\alpha)$; 其中 $d(\alpha)$ 是从 $K^{s(\alpha),\bullet}$ 到 $K^{b(\alpha),\bullet}$ 的次数为 $s(\alpha) - b(\alpha) + 1$ 的 α -映射, 且 $d(\text{Id}_{\Delta_n})$ 在相差符号 $(-1)^n$ 后就是 $K^{n,\bullet}$ 的微分。若这些 $d(\alpha)$ 满足 (3.2.8.2), 则它们来自

$$(K, d) \in C(\text{tot}(\mathcal{A}^+)).$$

在这套语言中, 复形态射 $f: K \rightarrow L$ 是一族映射 $f(\alpha)$; 对 $(\Delta)^+$ 中的箭头 α , $f(\alpha)$ 是从 $K^{s(\alpha),\bullet}$ 到 $L^{b(\alpha),\bullet}$ 的次数为 $s(\alpha) - b(\alpha)$ 的 α -映射, 并且对每个 α 都有

$$\sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta)f(\gamma) = \sum_{\alpha=\beta\gamma} f(\beta)d(\gamma). \quad (3.2.8.3)$$

下面给出一个充分条件, 保证诸 $K(\mathcal{A}(n))$ 中对象组成的严格单纯系统 (K^n) 来自 $K(\text{tot}(\mathcal{A}^+))$ 中的对象。

命题 3.2.9. 设 (K^n) 是由

$$K^n \in \text{Ob } K(\mathcal{A}(n)) \quad (n \geq 0)$$

组成的严格单纯系统。假设对任意 $n, m \geq n+3$ 及 $(\Delta)^+$ 中的态射 $\alpha: \Delta_n \rightarrow \Delta_m$, 都有

$$\text{Hom}^i(p(\alpha)^* K^n, K^m) = 0 \quad (i < 0).$$

则该系统来自 $K(\text{tot}(\mathcal{A}^+))$ 中的一个对象。

⁶¹译者注: 原文写作 $n-m+1$ 。由 3.2.8 中 $d(\beta)$ 的次数定义, 复合 $d(\beta)d(\gamma)$ 的次数为 $n-m+2$ 。同伦 $d(\alpha)$ 的次数才是 $n-m+1$ 。3.2.9 的证明也明确给出了和的次数 $s(\alpha) - b(\alpha) + 2$ 。

证明. 把每个 K^n 实现为复形 $(K^{n,\bullet}, d'')$, 并把每个 ∂_i^* 实现为复形之间的 ∂_i -态射, 仍记作

$$\partial_i^* : K^{n,\bullet} \longrightarrow K^{n+1,\bullet}.$$

对 $\text{Id} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$, 置

$$d(\text{Id}) = (-1)^n d'',$$

并对每个 $\partial_i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$, 置

$$d(\partial_i) = (-1)^i \partial_i^*.$$

由假设, 对 $0 \leq i < j \leq n+2$, 复合 $\partial_j^* \partial_i^*$ 与 $\partial_i^* \partial_{j-1}^*$ 彼此同伦。因此可取 $d(\partial_j \partial_i)$, 使 (3.2.8.2) 成立。

下面构造一族满足 (3.2.8.2) 并延拓上述选择的 $d(\alpha)$ 。作归纳: 假设当

$$b(\alpha) - s(\alpha) \leq k \quad (k \geq 2)$$

时, $d(\alpha)$ 已经选定; 现对 $b(\alpha) - s(\alpha) = k+1$ 构造它。只须证明

$$S(\alpha) := \sum_{\alpha=\beta\gamma}^I d(\beta)d(\gamma) \quad (*)$$

是一个从 $K^{s(\alpha),\bullet}$ 到 $K^{b(\alpha),\bullet}$ 的、次数为

$$-k+1 = s(\alpha) - b(\alpha) + 2$$

的复形 α -态射。事实上, 由命题的消失假设, $S(\alpha)$ 随即零伦; 这正意味着存在使 (3.2.8.2) 成立的 $d(\alpha)$ 。

证明 (*). 令 D 为所有满足 $b(\beta) - s(\beta) \leq k$ 的 $d(\beta)$ 之和, 并比较恒等式

$$D \circ (D \circ D) = (D \circ D) \circ D$$

在 α 处的分量。左端为

$$I = \sum_{\substack{\alpha=\beta\gamma \\ \beta \neq \alpha}} d(\beta)(D \circ D)(\gamma).$$

归纳假设说明, 当 $\gamma \neq \alpha$ 时, $(D \circ D)(\gamma) = 0$, 故

$$I = d(\text{Id})S(\alpha).$$

同理, 右端等于 $S(\alpha)d(\text{Id})$ 。因此

$$d(\text{Id})S(\alpha) = S(\alpha)d(\text{Id}),$$

而这正与 (*) 等价。归纳完成。 $\square$

3.2.10

记 ε_n 为从 Δ_{-1} 到 Δ_n 的唯一映射。对任意 $A \in \mathcal{A}(-1)$ ，系统 $p(\varepsilon_n)^*A$ 是 $\mathcal{A}^+$ 中的严格单纯对象，并在 $\text{tot}(\mathcal{A}^+)$ 中定义一个复形。这一构造可延拓到复形：对 $K \in \text{Ob } C(\mathcal{A}(-1))$ ，以 ε^*K 表示由严格单纯系统 $p(\varepsilon_n)^*K$ 定义的 $\text{tot}(\mathcal{A}^+)$ 中的复形；当 $b(\alpha) - s(\alpha) > 1$ 时，相应的高阶 $d(\alpha)$ 均取为零。以如下同构规定该函子与平移的相容结构：

$$(-1)^n : (\varepsilon^*(K[1]))^{n,m} = p(\varepsilon_n)^*K^{m+1} \longrightarrow ((\varepsilon^*K)[1])^{n,m} = p(\varepsilon_n)^*K^{m+1}.$$

作此选择后，由 ε^* 取商所得的函子（仍记作 ε^* ）

$$\varepsilon^* : K(\mathcal{A}(-1)) \longrightarrow K(\text{tot}(\mathcal{A}^+))$$

把好三角映为好三角。

3.2.11

记 $C(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ （相应地， $K(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ ）为 $C(\text{tot}(\mathcal{A}^+))$ （相应地， $K(\text{tot}(\mathcal{A}^+))$ ）的全子范畴，其中对象 K 满足：存在充分小的 M ，使

$$K^{n,m} = 0 \quad (m < M).$$

对 $K \in C(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ ，记 ε_*K 为 $C^+(\mathcal{A}(-1))$ 中的复形，其定义为

$$(\varepsilon_*K)^p = \bigoplus_{n+m=p} p(\varepsilon_n)_*K^{n,m}, \quad d = \sum d(\alpha).$$

这里直和是有限的；上式略去记号上的区别，仍以 $d(\alpha)$ 表示对原 $d(\alpha)$ 取直接像所得的态射。有显然的同构

$$\varepsilon_*(K[1]) = (\varepsilon_*K)[1].$$

由 ε_* 取商所得的函子

$$\varepsilon_* : K(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+ \longrightarrow K^+(\mathcal{A}(-1))$$

把好三角映为好三角。对 $K \in C^+(\mathcal{A}(-1))$ ，伴随态射族

$$K^n \longrightarrow p(\varepsilon_0)_*p(\varepsilon_0)^*K^n$$

组成一个复形态射

$$a : K \longrightarrow \varepsilon_*\varepsilon^*K. \quad (3.2.11.1)$$

命题 3.2.12. 函子

$$\varepsilon^* : K^+(\mathcal{A}(-1)) \longrightarrow K(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+, \quad \varepsilon_* : K(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+ \longrightarrow K^+(\mathcal{A}(-1))$$

构成伴随对 $\varepsilon^* \dashv \varepsilon_*$ ，其单位态射（unit；法：unité de l'adjonction）为 (3.2.11.1) 中的 a 。

证明. 对任意加性范畴 $\mathcal{B}$, $K(\mathcal{B})$ 中从 K 到 L 的态射群, 是复形 $\mathrm{Hom}(K, L)^\bullet$ 的 H^0 ; 其分量为

$$\mathrm{Hom}(K, L)^d = \prod_{m-n=d} \mathrm{Hom}(K^n, L^m),$$

微分由

$$d(f) = d \circ f - (-1)^d f \circ d$$

给出。为证明命题, 只须对 $K \in K^+(\mathcal{A}(-1))$ 和 $L \in K(\mathrm{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 证明由 a 诱导的态射

$$\mathrm{Hom}(\varepsilon^* K, L)^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varepsilon_* \varepsilon^* K, \varepsilon_* L)^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, \varepsilon_* L)^\bullet \quad (3.2.12.1)$$

是拟同构。

给 L 配上递减滤过, 使其逐次商为只含某个 $L^{n,m}$ 的复形。例如, 先以

$$\bigoplus_{n+m \geq A} L^{n,m}$$

滤过 L , 再以

$$\bigoplus_{n \geq B} L^{n, A-n}$$

滤过逐次商 $\bigoplus_{n+m=A} L^{n,m}$; 后一滤过是有限的。由此在 $\mathrm{Hom}^\bullet$ 复形上得到分离且完备的滤过, 所以只须在取相伴分次后证明 (3.2.12.1) 为拟同构。于是可以并且以下就假设 L 集中在一个双次数。

再以笨截断 $\sigma_{\geq n}$ 给 K 加滤过。这次 $\mathrm{Hom}^\bullet$ 上所得滤过在每个次数都是有限的, 故可进一步假设 K 只集中在一个次数。作平移后, 最终只须考虑如下情形: K 是置于次数 0 的对象 A , 而 L 是置于双次数 $(n, 0)$ 的 $\mathcal{A}(n)$ 中对象 B 。此时

$$\mathrm{Hom}(\varepsilon^* K, L)^d = \prod_{\substack{\alpha: \Delta_{n-d} \rightarrow \Delta_n \\ n-d \geq 0}} \mathrm{Hom}_{\varepsilon_n}(A, B).$$

复形 $\mathrm{Hom}(\varepsilon^* K, L)^\bullet$ 是 $\mathrm{Hom}_{\varepsilon_n}(A, B)$ 与 Δ_n 的非退化链的复形 (*complex of non-degenerate chains*; 法: *complexe des chaînes non dégénérées*) (平移 $-n$) 的张量积。(3.2.12.1) 的锥再平移 $[-1]$ 后仍由同一公式给出, 只是不再要求 $n-d \geq 0$ 。最后只须用到: Δ_n 的非退化链的增广复形 (*augmented complex of non-degenerate chains*; 法: *complexe augmenté des chaînes non dégénérées*) 零伦。

□

3.2.13

尽管下文并不用到这一点, 我们仍将在 3.2.13、3.2.14 中写出一个复形态射, 用以表示从 $\varepsilon^* \varepsilon_* L$ 到 L 的余单位态射 (*counit*; 法: *morphisme d'adjonction*)。由 3.2.8, 复形态射

$$b: \varepsilon^* \varepsilon_* L \longrightarrow L$$

是一族次数为 $s(\alpha) - b(\alpha)$ 的 α -映射

$$b(\alpha) : p(\varepsilon_{s(\alpha)})^*(\varepsilon_* L) \longrightarrow L^{b(\alpha), \bullet},$$

并须满足 (3.2.8.3)。这样的 α -映射可等同于一个从 $\varepsilon_* L$ 到 $L^{b(\alpha), \bullet}$ 的 $\varepsilon_{b(\alpha)}$ -映射 $b'(\alpha)$ 。形式地写成

$$b = \sum_{\alpha} b'(\alpha) \otimes \alpha,$$

也就是把 b 视为下列各群之积中的一个元素：

$$\prod_n \left(\{ \varepsilon_n\text{-映射 } \varepsilon_* L \rightarrow L^{n, \bullet} \} \otimes \{ \Delta_n \text{ 的非退化链} \} \right).$$

反过来，从 $\varepsilon_* L$ 到 $L^{n, \bullet}$ 的次数为 s 的 ε_n -映射 b' ，可等同于一族次数为 $s + p$ 的 ε_n -映射

$$b'_p : p(\varepsilon_p)_* L^{p, \bullet} \longrightarrow L^{n, \bullet}.$$

我们只考虑如下形式的 b'_p 之和。它们由 $\beta : \Delta_p \rightarrow \Delta_n$ 标号，并且是下列两个映射的复合：从 $p(\varepsilon_p)_* L^{p, \bullet}$ 到 $L^{p, \bullet}$ 的自然 ε_p -映射，以及一个 β -映射

$$b''(\beta) : L^{p, \bullet} \longrightarrow L^{n, \bullet}.$$

形式地写作 $b' = \sum_{\beta} b''(\beta)$ 。总之，我们要把 b 构造成

$$b = \sum_{\alpha, \beta} b''(\alpha, \beta) \otimes \alpha,$$

其中 α 与 β 有同一终点，而 $b''(\alpha, \beta)$ 是从 $L^{s(\beta), \bullet}$ 到 $L^{b(\beta), \bullet}$ 的 β -映射，次数为

$$s(\alpha) - b(\alpha) + s(\beta) = s(\beta) - b(\beta) + s(\alpha).$$

对每个分解

$$\beta = \beta_1 \cdots \beta_{s(\alpha)},$$

复合诸 $d(\beta_i)$ 便给出一个这种次数的 β -映射。下面证明可取

$$b = \sum_{k, m} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} d(\beta_1) \cdots d(\beta_k) \otimes (0, \beta_1(0), \beta_1 \beta_2(0), \dots, \beta_1 \cdots \beta_k(0)). \quad (3.2.13.1)$$

这里求和取遍 k, m 以及所有由 k 个可复合映射组成、复合映入 Δ_m 的序列。允许空序列 ($k = 0$)；对每个 m ，相应项为

$$\text{Id}_{L^{m, \bullet}} \otimes (0).$$

括号中的序列表示把每个指标送到相应项的映射；若此映射不是严格递增的，就把该项置为零（亦即略去）。

我们须证明 b 是复形态射，并且它在 3.2.12 的伴随等同

$$\mathrm{Hom}(\varepsilon^* \varepsilon_* L, L) = \mathrm{Hom}(\varepsilon_* L, \varepsilon_* L)$$

下对应于 $\varepsilon_* L$ 的恒等映射；也就是说，复形态射的复合

$$\varepsilon_* L \xrightarrow{a} \varepsilon_* \varepsilon^* \varepsilon_* L \xrightarrow{\varepsilon_* b} \varepsilon_* L$$

应同伦于恒等映射。容易看出，它事实上就等于恒等映射：这个复合只依赖于 b 中对应 $\alpha: \Delta_0 \rightarrow \Delta_m$ 的分量 $b'(\alpha) \otimes \alpha$ ，而其中非零分量均为 $\mathrm{Id}_{L^{m,\bullet}} \otimes (0)$ 。

3.2.14

b 是复形态射。所需验证的恒等式为 $db = bd$ ，即

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} \sum_{k, m=s(\alpha)} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} d(\alpha) d(\beta_1) \cdots d(\beta_k) \\ & \quad \otimes \alpha \circ (0, \beta_1(0), \dots, \beta_1 \cdots \beta_k(0)) \\ &= \sum_{k, m} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} (-1)^k \sum_{\alpha} d(\beta_1) \cdots d(\beta_k) d(\alpha) \\ & \quad \otimes (0, \beta_1(0), \dots, \beta_1 \cdots \beta_k(0)) \\ & \quad + \sum_{k, m} \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} \sum_i (-1)^i d(\beta_1) \cdots d(\beta_k) \\ & \quad \otimes (0, \beta_1(0), \dots, \beta_1 \cdots \beta_k(0)) \circ \partial_i. \end{aligned} \quad (*)$$

其中对 $k, m, \beta_1, \dots, \beta_k$ 的求和与 (3.2.13.1) 相同； i 从 0 到 k ，但当 $k=0$ 时此和为空。注意，若

$$c = (0, \beta_1(0), \dots, \beta_1 \cdots \beta_k(0))$$

是 Δ_m 的退化链 (degenerate chain; 法: chaîne dégénérée)，则

$$\sum_i (-1)^i c \circ \partial_i = 0 \quad (\text{mod 退化链}).$$

为证明恒等式 (*), 只须对每个 $k \geq 0$ 验证下式；它在前两项中对应 k ，在第三项中对应 $k-1$:⁶²

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta_0, \dots, \beta_k} d(\beta_0) \cdots d(\beta_k) \otimes (\beta_0(0), \beta_0 \beta_1(0), \dots, \beta_0 \cdots \beta_k(0)) \\ & \quad - (-1)^k \sum_{\beta_0, \dots, \beta_k} d(\beta_0) \cdots d(\beta_k) \otimes (0, \beta_0(0), \dots, \beta_0 \cdots \beta_{k-1}(0)) \\ &= \sum_{\beta_0, \dots, \beta_k} \sum_{-1 \leq i \leq k} (-1)^{i+1} d(\beta_0) \cdots d(\beta_k) \\ & \quad \otimes (0, \beta_0(0), \dots, \beta_0 \cdots \widehat{\beta_i(0)}, \dots, \beta_0 \cdots \beta_k(0)). \end{aligned}$$

⁶²译者注：原文写作 $k-1$ 。下式右端含 $k+1$ 个 $d(\beta_j)$ ，因而应取上式第三项中指标为 $k+1$ 的部分；其链有 $k+2$ 个顶点，取边界后剩下 $k+1$ 个顶点。

这些和取遍由 $k+1$ 个可复合态射组成的链；若由括号中各项给出的 $\Delta_k \rightarrow \Delta_{b(\beta_0)}$ 映射不是单射，相应项即为零。左端两项分别就是右端的 $i = -1$ 与 $i = k$ 两项。为完成证明，只须固定任意 $k \geq 0$ 、 $-1 < i < k$ ，再固定

$$\beta_0, \dots, \beta_{i-1}, \quad \beta = \beta_i \beta_{i+1}, \quad \beta_{i+2}, \dots, \beta_k.$$

这些资料已确定删去一项后的链。于是只需验证

$$\sum_{\beta_i \beta_{i+1} = \beta} d(\beta_0) \cdots d(\beta_k) = 0,$$

而这正是 (3.2.8.1)。

3.2.15

现在假设各 $\mathcal{A}(n)$ 都是有足够多内射对象的阿贝尔范畴，并且函子 $p(\alpha)^*$ 正合。于是， $p(\alpha)_*$ 把内射对象映为内射对象。若 $C(\text{tot}(\mathcal{A}^+))$ 中的态射 $f: K \rightarrow L$ 满足：对每个 n ，

$$f(\text{Id}_{\Delta_n}) : K^{n, \bullet} \longrightarrow L^{n, \bullet}$$

都是拟同构，就称 f 为拟同构。此条件在同伦下不变；也可等价地表述为：每个 $\text{Gr}_L^n(f)$ 都是拟同构。导出范畴

$$D(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$$

定义为对 $K(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 中这些拟同构取逆所得的范畴。函子 ε^* 直接下降到导出范畴，并给出正合函子

$$\varepsilon^* : D^+(\mathcal{A}(-1)) \longrightarrow D(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+.$$

函子 ε_* 的右导出函子为

$$R\varepsilon_* : D(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+ \longrightarrow D^+(\mathcal{A}(-1)).$$

要计算 $L \in C(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 的像，可取一个拟同构

$$L \xrightarrow{\sim} L',$$

使 L' 的各双齐次分量 (*bihomogeneous component*; 法: *composante bihomogène*) 均为内射对象，再取 $\varepsilon_* L'$ 。事实上，只须 $L' \in C(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 与 L 拟同构，并且对每个 n ，自然态射

$$p(\varepsilon_n)_* L'^{n, \bullet} \xrightarrow{\sim} Rp(\varepsilon_n)_* L^{n, \bullet} \quad \text{在 } D^+(\mathcal{A}(-1)) \text{ 中}$$

为同构。由 3.2.12 立即得到： ε^* 与 $R\varepsilon_*$ 仍构成伴随对。

3.2.16

诸范畴 $D(\mathcal{A}(n))$ 自然组成 $(\Delta)^+$ 上的一个余纤维化范畴。设

$$K \in D(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+.$$

诸 $\mathrm{Gr}_L^n K$ 组成该余纤维化范畴的一个截面。⁶³若

$$K = \varepsilon^* K_{-1}, \quad K_{-1} \in \mathrm{Ob} D^+(\mathcal{A}(-1)),$$

则此截面是余笛卡尔的：它就是系统 $p(\varepsilon_n)^* K_{-1}$ 。鉴于当前语境，我们以下称“笛卡尔的”而不称“余笛卡尔的”。若 $K \in D(\mathrm{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 满足：诸 $\mathrm{Gr}_L^n K[n]$ 连同 3.2.8 中定义的 ∂_i -映射，组成 $D(\mathcal{A}(n))$ 系统的笛卡尔截面 (*cartesian section*; 法: *section cartésienne*)，就称 K 为笛卡尔对象 (*cartesian object*; 法: *objet cartésien*)。换言之，对每个 i ，诸

$$H^i(\mathrm{Gr}_L^n K[n])$$

须组成 $\mathcal{A}^+$ 在 $(\Delta)^+$ 上的笛卡尔截面。

定理 3.2.17. 除 3.2.6 与 3.2.15 的假设外，再假设：

a) 函子

$$A \mapsto (p(\varepsilon_n)^* A)_{n \geq 0}$$

给出 $\mathcal{A}(-1)$ 与 $\mathcal{A}^+$ 在 $(\Delta)^+$ 上的笛卡尔截面范畴之间的范畴等价；

b) 对每个 $A \in \mathcal{A}(-1)$ ，把它视为 $D^+(\mathcal{A}(-1))$ 中的对象 $A[0]$ 后，伴随态射

$$A \longrightarrow R\varepsilon_* \varepsilon^* A$$

是同构。

则 ε^* 与 $R\varepsilon_*$ 互为逆等价，把 $D^+(\mathcal{A}(-1))$ 等同于 $D(\mathrm{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 中笛卡尔对象所成的范畴。

证明. 我们将证明：对 $K \in D^+(\mathcal{A}(-1))$ ，以及对 $D(\mathrm{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 中任意笛卡尔对象 L ，相应的伴随态射

$$a : K \longrightarrow R\varepsilon_* \varepsilon^* K, \quad (3.2.17.1)$$

$$b : \varepsilon^* R\varepsilon_* L \longrightarrow L \quad (3.2.17.2)$$

都是同构。使 (3.2.17.1) (相应地, (3.2.17.2)) 成为同构的对象 K (相应地, L)，组成 $D^+(\mathcal{A}(-1))$ (相应地, $D(\mathrm{tot}(\mathcal{A}^+))^+$) 的三角子范畴。由假设, (3.2.17.1) 对 $K = A[0]$ 成立；通过剥离，它对每个 $K \in D^b(\mathcal{A}(-1))$ 都成立。最后，对每个 i ，

$$\tau_{\leq i} R\varepsilon_* \varepsilon^* K$$

只依赖于 $\tau_{\leq i} K$ ，所以 (3.2.17.1) 对所有 $K \in D^+(\mathcal{A}(-1))$ 都是同构。

这已足以说明 ε^* 给出 $D^+(\mathcal{A}(-1))$ 与其在 $D(\mathrm{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 中的像之间的等价，并且 (3.2.17.2) 对像中的 L 是同构。事实上，若 $L = \varepsilon^* K$ ，则同构 $\varepsilon^* K \xrightarrow{\sim} L$ 经伴随后对应于同构 $K \xrightarrow{\sim} R\varepsilon_* L$ 。

⁶³译者注：原文此处漏写移位 $[n]$ 。依 3.2.8，截面的对象应为 $(\mathrm{Gr}_L^n K)[n] = K^{n, \bullet}$ ；以下笛卡尔对象的定义也采用这一移位。

现在设 $L \in D(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 是笛卡尔对象。对每个 i , $\mathcal{A}^+$ 在 $(\Delta)^+$ 上的截面

$$H^i L^{n,\bullet}$$

是笛卡尔的, 因而由假设来自某个 $h^i \in \mathcal{A}(-1)$ 。以

$$(\tau_{\leq i} L)^{n,\bullet} = \tau_{\leq i}(L^{n,\bullet})$$

定义 L 的典范滤过。于是, 在 $D(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 中有好三角

$$\longrightarrow \tau_{\leq i-1} L \longrightarrow \tau_{\leq i} L \longrightarrow \varepsilon^*(h^i[-i]) \longrightarrow .$$

若 $|i|$ 充分大时 $h^i = 0$, 则剥离论证表明 (3.2.17.2) 是同构; 换言之, L 属于 ε^* 的像。最后,

$$\tau_{\leq i}(\varepsilon^* R\varepsilon_* L)$$

只依赖于 $\tau_{\leq i} L$; 而 (3.2.17.2) 对每个 $\tau_{\leq i} L$ 已经是同构, 故一般情形也随之成立。 $\square$

3.2.18 3.2.4 的证明

沿用 3.2.5 的记号。对 $n \geq 1$, ${}^{64}U^{\Delta_n}$ 上 $\mathcal{O}$ -模层的范畴, 正是 (Δ) 上某个既纤维化又余纤维化的范畴 $\mathcal{A}$ 的诸纤维; 它满足 3.2.6 与 3.2.15 的假设。 $\mathcal{A}(-1)$ 是 S 上 $\mathcal{O}$ -模层的范畴。3.2.17 的假设也成立: a) 表达层的局部性; b) 可见于 R. Godement, *Théorie des faisceaux*, 或 SGA 4 VI B 中开覆盖的 Leray 谱序列之构造。由 3.2.9, 3.2.5 中的系统 (K^n) 来自 $D(\text{tot}(\mathcal{A}^+))^+$ 的一个对象; 再由 3.2.17, 它来自 $D^+(S)$, 如所欲证。

3.2.19 应用: 2.1.4 的推广

设 X 是带有环层 $\mathcal{O}$ 的拓扑空间, $\mathcal{S}$ 是 X 的一个由局部闭子集组成的局部有限分拆 (*locally finite partition*; 法: *partition localement finie*), $p: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}$ 是有界函数。按 2.1.2 定义 ${}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O})$ 与 ${}^p D^{\geq 0}(X, \mathcal{O})$ 。

命题 3.2.20. 二元组

$$({}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O}), {}^p D^{\geq 0}(X, \mathcal{O}))$$

是 $D(X, \mathcal{O})$ 上的 t -结构。它在 $D^*(X, \mathcal{O})$ 上诱导 t -结构, 其中 $*$ = $+, -, b$ 。

证明. 仿照 2.1.4, 只须证明⁶⁵

$${}^p D^{+, \leq 0}(X, \mathcal{O}) := {}^p D^{\leq 0}(X, \mathcal{O}) \cap D^+(X, \mathcal{O})$$

与 ${}^p D^{\geq 0}(X, \mathcal{O})$ 在 $D^+(X, \mathcal{O})$ 上定义一个 t -结构。

先假设分拆 $\mathcal{S}$ 有限, 并对片层数 N 作归纳。这里与 2.1.3 的区别在于, 不再假设每一片层的闭包都是若干片层的并。当 $N \leq 1$ 时, 所得结构只是自然 t -结构的平移,

⁶⁴译者注: 原文写作 $n \geq 1$ 。由 3.2.6 中 (Δ) 的定义及本段的 $\mathcal{A}(-1)$, 这里应包括 $n = -1, 0$, 即应取 $n \geq -1$ 。

⁶⁵据勘误第 40 条修正。

结论显然。若 $N > 1$, 则每个点 x 都属于某个片层 S , 并有开邻域 U , 使 $U \cap S$ 在 U 中闭。对任意开集 $V \subset U$, 归纳假设可用于 S 在 $V - S$ 与 $V \cap S$ 上诱导的分拆; 由 1.4.10,

$$({}^pD^{+, \leq 0}(V, \mathcal{O}), {}^pD^{\geq 0}(V, \mathcal{O}))$$

是 $D^+(V, \mathcal{O})$ 上的 t -结构。要完成归纳, 并从有限分拆推广到一般情形, 只须证明下面的断言。

引理 3.2.21. 设 X 有一个开覆盖 $\mathcal{U}$, 并且对每个 $U \in \mathcal{U}$ 及每个开集 $V \subset U$,

$$({}^pD^{+, \leq 0}(V, \mathcal{O}), {}^pD^{\geq 0}(V, \mathcal{O}))$$

都是 $D^+(V, \mathcal{O})$ 上的 t -结构。则

$$({}^pD^{+, \leq 0}(X, \mathcal{O}), {}^pD^{\geq 0}(X, \mathcal{O}))$$

是 $D^+(X, \mathcal{O})$ 上的 t -结构。

证明. 利用局部化, 可证明 2.1.21 及其推论在这里的对应版本。特别地,

$$\mathcal{C}_V = {}^pD^{+, \leq 0}(V, \mathcal{O}) \cap {}^pD^{\geq 0}(V, \mathcal{O})$$

组成一个叠, 更确切地说是阿贝尔范畴值叠; 因而 $\mathcal{C}_X$ 是阿贝尔范畴。 t -结构公理 1.3.1(i) 由 2.1.21 得到, 公理 1.3.1(ii) 显然。下面证明 1.3.1(iii)。

取 $K \in D^+(X, \mathcal{O})$ 。局部地, ${}^pH^n(K)$ 已有定义; 它们可以粘合, 从而给出 $\mathcal{C}_X$ 中的对象 ${}^pH^n(K)$ 。对满足

$${}^pH^n(K) = 0 \quad (n < N)$$

的 N 作降序归纳。若 $N > 0$, 三角 $(0, K, K)$ 已满足要求。局部地, 有态射⁶⁶

$${}^pH^N(K)[N] \longrightarrow K.$$

由 1.2.1, 它可整体化。⁶⁷取好三角

$$({}^pH^N(K)[N], K, K').$$

归纳假设适用于 K' ; 因此当 $N \leq 0$ 时, 存在态射 $K' \rightarrow B$, 使复合 $K \rightarrow B$ 在局部把 B 实现为 K 的 ${}^p\tau_{>0}$ 。

把 $K \rightarrow B$ 补成三角 (A, K, B) 。局部地, 因而也整体地, ⁶⁸

$$A \in {}^pD^{+, \leq 0}(X, \mathcal{O}), \quad B \in {}^pD^{> 0}(X, \mathcal{O}).$$

这就验证了 1.3.1(iii)。 □

⁶⁶译者注: 原文此处及下一三角均写作 $[N]$ 。由截断三角, 其最低非零崴上同调项应为 ${}^pH^N(K)[-N]$ 。

⁶⁷译者注: 原文引作 1.2.1, 但该处只是阿贝尔范畴嵌入其导出范畴的例子。此处态射的粘合可由 2.1.22 的局部版本得到; 也可应用 3.2.2, 并用 2.1.21 的局部版本验证负次数 Ext 层的消失。

⁶⁸据勘误第 41 条修正。

3.3 整数上同调

3.3.1

在阿贝尔群范畴的导出范畴 $D(\mathbb{Z})$ 中, 函子

$$\mathbb{D} : K \longmapsto \mathbb{D}K = R\mathrm{Hom}(K, \mathbb{Z})$$

在 $D(\mathbb{Z})$ 的全子范畴 $D_c(\mathbb{Z})$ 上诱导自对偶 (*self-duality*; 法: *autodualité*); 这里 $D_c(\mathbb{Z})$ 由所有 $H^i K$ 均为有限生成阿贝尔群的 K 组成. 此自对偶不保持自然 t -结构 n , 而是把它与下列 t -结构 n^* 互换:

$$\begin{aligned} {}^{n^*}D^{\leq 0} &= \{K \mid H^i K = 0 \ (i > 1), H^1 K \text{ 为挠群}\}, \\ {}^{n^*}D^{\geq 0} &= \{K \mid H^i K = 0 \ (i < 0), H^0 K \text{ 无挠}\}. \end{aligned}$$

3.3.2

对任意拓扑空间 X , 在 $D(X, \mathbb{Z})$ 上定义 t -结构 n^+ :

$$\begin{aligned} {}^{n^+}D^{\leq 0} &= \{K \mid H^i K = 0 \ (i > 1), H^1 K \otimes \mathbb{Q} = 0\}, \\ {}^{n^+}D^{\geq 0} &= \{K \mid H^i K = 0 \ (i < 0), H^0 K \text{ 无挠}\}. \end{aligned}$$

这一 t -结构的截断函子 $\tau_{\leq 0}$, 来自层复形范畴上的如下函子: 它把复形 K 映到子复形 $K' \subset K$, 其中

$$K'^i = K^i \quad (i \leq 0), \quad K'^i = 0 \quad (i > 1),$$

而 K'^1 是 $H^1 K$ 的挠子层在 $\ker(d) \subset K^1$ 中的逆像。

3.3.3

若 X 是纯维数 d 的拓扑流形, 则 t -结构 n (自然 t -结构) 与 n^+ 在 $D(X, \mathbb{Z})$ 的全子范畴 $D_{lc}(X, \mathbb{Z})$ 上诱导 t -结构; 该子范畴由上同调层均为有限生成局部常值层的 K 组成. 由 3.3.1, 在相差平移 d 的意义下, 这两个 t -结构被 X 上的 Verdier 对偶⁶⁹

$$\mathbb{D} : K \longmapsto R\mathrm{Hom}(K, \mathrm{or}[-d])$$

互换; 具体地说, 它把 ${}^n D^{\leq 0}$ 与 ${}^{n^+} D^{\geq -d}$ 互换。⁷⁰

⁶⁹据勘误第 42 条修正。

⁷⁰译者注: 原文写作 $\mathrm{or}[-d]$, 其中 or 是定向层. 按本书的上同调移位约定, d 维流形的对偶化复形应为 $\mathrm{or}[d]$. 这也与本句的下界 $-d$ 一致. 2018 年勘误 42 只修正内部 Hom 的记号, 未修正此移位。

3.3.4

设 X 是 2.1.1 中的分层空间，并取 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ 。把各片层上的 t -结构

$$({}^{n^+}D^{\leq p(S)}, {}^{n^+}D^{\geq p(S)})$$

粘合起来，便在 $D(X, \mathbb{Z})$ 上定义 t -结构

$$({}^{p^+}D^{\leq 0}(X, \mathbb{Z}), {}^{p^+}D^{\geq 0}(X, \mathbb{Z})).$$

2.1.3–2.1.11 的形式体系仍然适用；在 2.1.11 中， $\tau_{\leq i}$ 应按 n^+ 的意义理解。

若 $(X, \mathcal{S})$ 满足 2.1.13 的假设，此 t -结构在 $D_c^+(X, \mathbb{Z})$ 上诱导一个 t -结构，而且 2.1.14 关于加细分层的结论仍成立。 $D_c^+(X, \mathbb{Z})$ 上崴度 p 与 p^+ 的 t -结构彼此决定。省略记号中的 $(X, \mathbb{Z})$ 后，对任意 $K \in D_c^+$ ，有等价关系

- (i) $K \in {}^{p^+}D^{\leq 0} \iff K \in {}^pD^{\leq 1}$ 且 ${}^pH^1K$ 为挠的；
- (ii) $K \in {}^{p^+}D^{\geq 0} \iff K \in {}^pD^{\geq 0}$ 且 ${}^pH^0K$ 无挠；
- (iii) $K \in {}^pD^{\leq 0} \iff K \in {}^{p^+}D^{\leq 0}$ 且 ${}^{p^+}H^0K$ 可除；
- (iv) $K \in {}^pD^{\geq 0} \iff K \in {}^{p^+}D^{\geq -1}$ 且 ${}^{p^+}H^{-1}K$ 为挠的。

在 (i)–(iv) 中，挠 (*torsion*; 法: *de torsion*) 是指局部存在整数 $n \neq 0$ ，使“乘以 n ”这一自同态为零⁷¹；无挠 (*torsion-free*; 法: *sans torsion*) (相应地，可除 (*divisible*; 法: *divisible*)) 是指对每个 $n \neq 0$ ，“乘以 n ”都是单态射 (相应地，满态射)。

由这些等价关系可知：正合函子

$$T : D_c^+(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow D_c^+(X', \mathbb{Z})$$

对崴度 p 的 t -结构右 t -正合，当且仅当它对崴度 p^+ 的 t -结构右 t -正合。显然有包含关系

$${}^pD^{\leq n} \subset {}^{p^+}D^{\leq n} \subset {}^pD^{\leq n+1}, \quad {}^pD^{\geq n-1} \subset {}^{p^+}D^{\geq n} \subset {}^pD^{\geq n}.$$

译者注：第二串包含关系的首项，原文写作 ${}^pD^{\geq n-1}$ 。对第一串包含关系在次数 $n-1$ 的情形取右正交，正确的第二串包含关系为

$${}^pD^{\geq n+1} \subset {}^{p^+}D^{\geq n} \subset {}^pD^{\geq n}.$$

为证明 (i)，先验证 ${}^{p^+}D_c^{\leq 0}$ 正是 ${}^pD_c^{\leq 1}$ 中满足如下条件的对象所成的子范畴：其在 ${}^pD_c(X, \mathbb{Q})$ 中的像属于 ${}^pD_c^{\leq 0}(X, \mathbb{Q})$ 。再利用 $D^{\geq 0}$ 是 $D^{\leq -1}$ 的右正交，便得 (i) $\Rightarrow$ (ii)；(iv) 与 (iii) 同理。

再假设 $(X, \mathcal{S})$ 可三角剖分；例如， X 是带 Whitney 分层的实代数空间。此时 Verdier 对偶在 $D_c(X, \mathbb{Z})$ 上把崴度 p 与 $(p^*)^+$ 的 t -结构互换。这是 3.3.3 以及下述事实的形式推论：若 i 是一个片层的嵌入，则 $\mathbb{D}$ 互换 $i^!$ 与 i^* 。

以上结论在以 Dedekind 环 (*Dedekind ring*; 法: *anneau de Dedekind*) R 替代 $\mathbb{Z}$ 后仍成立。

⁷¹据勘误第 43 条修正。

3.3.5

若 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形，则可像 2.2.1 那样对代数分层取极限。若 X 是域 k 上的有限型概形， ℓ 是不同于 k 的特征的素数，则只要已经构造出合适的导出范畴（参见 2.2.14–2.2.16），同样的做法也适用于 $\mathbb{Z}_\ell$ -上调。

关于 ℓ -进形式体系，还可参见 [Eke90]、[BS15]；采用 ∞ -范畴的较新版本见 [GL17, chap. II]。⁷²

⁷²据勘误第 44 条修正。

4 自对偶崑度：几何性质

4.0

本章及下一章（专论消失圈的 4.4 节除外）只考虑域 k 上有限型的分离概形，并一律取自对偶崑度 $p_{1/2}$ 。我们在 $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中工作 (2.2.18) ⁷³。为使这个范畴有定义并服从通常的形式体系，须把 k 限定为满足下述条件的域：对 k 的每个有限扩张 k' ，各群

$$H^i(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k'), \mathbb{Z}/\ell)$$

均为有限群（参见 2.2.14）⁷⁴。例如， k 可以是有限域或代数闭域。

多数结果对 $\mathbb{Q}_\ell$ 、 $\mathbb{Z}_\ell$ 或 $\mathbb{Z}/\ell^n$ 系数也成立，尤其适用于 $\mathbb{Z}/\ell$ -上同调。还可把 $\mathbb{Q}_\ell$ 换成其有限扩张 E_λ ，把 $\mathbb{Z}_\ell$ 换成相应的赋值环（*valuation ring*；法：anneau de valuation） V_λ ，并把 $\mathbb{Z}/\ell^n$ 换成 V_λ 的有限商环 R 。若逐一列出这些变体，行文将不堪卒读，故只写 $\mathbb{Q}_\ell$ 系数这一种情形⁷⁵。证明常归约到 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -模层的情形，而归约过程也常留给读者。为此请回忆：限制标量（*restriction of scalars*；法：restriction des scalaires）函子 T （从 V_λ 到 $\mathbb{Z}_\ell$ ）以及向有限商环扩张标量（*extension of scalars*；法：extension des scalaires）的函子 T （例如从 $\mathbb{Z}_\ell$ 到 $\mathbb{Z}/\ell^n$ ）都是保守的，并且

$$K \in {}^p D^{\leq 0} \iff TK \in {}^p D^{\leq 0}.$$

另见 2.2.17、2.2.18。

若读者要把这里的结果用于 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 以外的系数，须留意下列各点。

- (a) 在 $\mathbb{Z}_\ell$ -上同调中，自对偶崑度 $p_{1/2}$ 给出两个 t -结构 $[p_{1/2}]$ 与 $[p_{1/2}^+]$ (3.3) ⁷⁶，二者由对偶性互换。
- (b) 定理 4.3.1 对 $\mathbb{Z}_\ell$ -上同调并不成立，即便 X 只是一个点也是如此： $[p_{1/2}]$ -崑层范畴仅为诺特的（*Noetherian*；法：noethérienne），而 $[p_{1/2}^+]$ -崑层范畴仅为阿廷的（*Artinian*；法：artinienne）⁷⁷。
- (c) 4.5 只有在系数环为域时才有意义。
- (d) 系数环为域时，张量积具有更好的正合性；例如 4.2.8 就要求系数环为域。

⁷³据勘误第 45 条修正。

⁷⁴据勘误第 46 条修正。

⁷⁵据勘误第 47 条修正。

⁷⁶据勘误第 48 条修正。

⁷⁷据勘误第 49 条修正。

回忆 (参见 2.2.11、2.2.12) ⁷⁸, 对自对偶崴度 $p_{1/2}$, X 上的崴层是满足下述条件的对象 $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$: 对 X 的每个点 (不必闭) x , 令

$$\dim(x) = \dim \overline{\{x\}} = \text{trdeg}_k k(x),$$

并记 $i_x : x \hookrightarrow X$ 为包含映射, 则

$$H^i(i_x^* K) = 0 \quad \text{当 } i > -\dim(x), \quad (4.0.1)$$

$$H^i(i_x^! K) = 0 \quad \text{当 } i < -\dim(x). \quad (4.0.2)$$

条件 (4.0.1) 刻画 ${}^p D_c^{\leq 0}$, 条件 (4.0.2) 刻画 ${}^p D_c^{\geq 0}$. 条件 (4.0.1) 又等价于: 对每个 i ,

$$\dim \text{Supp } H^i K \leq -i. \quad (4.0.1')$$

特别地, $i > 0$ 时 $H^i K = 0$.

例如, 在纯维数为 d 的光滑概形 X 上, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[d]$ (更一般地, 置于次数 $-d$ 的光滑层 (*smooth sheaf*; 法: *faisceau lisse*)), 以及置于上同调次数 0 的点支撑层 (*punctual sheaf*; 法: *faisceau ponctuel*), 都是崴层 (参见 2.2.2).

由于崴度 $p_{1/2}$ 自对偶, Verdier 对偶互换 ${}^p D_c^{\geq 0}$ 与 ${}^p D_c^{\leq 0}$, 从而在崴层范畴上诱导一个反自等价 (*anti-autoequivalence*; 法: *anti-autoéquivalence*).

记号 4.0.3. 对 $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 以及任意 X -概形 $u : Z \rightarrow X$, 以 $H^i(Z, K)$ 表示超上同调群

$$\mathbb{H}^i(Z, u^* K).$$

4.1 仿射态射

下述定理是 M. Artin 的定理 SGA 4 XIV 3.1 的另一种表述。

定理 4.1.1. 若 $f : X \rightarrow Y$ 是仿射态射, 则函子

$$Rf_* : D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

右 t -正合。

只须证明 $\mathbb{Z}/\ell$ -上同调中的对应命题 (参见 4.0)。若 F 是可构造层, M. Artin 为 F 定义的整数 $d(F)$, 正是把 F 视作导出范畴中的对象时, 使

$$F \in {}^p D_c^{\leq d}$$

成立的最小整数 d 。若 K 是可构造导出范畴中的对象, 则

$$d(K) := \sup_i (i + d(H^i K))$$

⁷⁸据勘误第 50 条修正。

同样是使 $K \in {}^pD_c^{\leq d}$ 成立的最小整数。事实上, $K \in {}^pD_c^{\leq 0}$ 当且仅当每个 $H^i K[-i]$ 都属于 ${}^pD_c^{\leq 0}$ 。因此, 要证明 Rf_* 把 ${}^pD_c^{\leq 0}(X)$ 映入 ${}^pD_c^{\leq 0}(Y)$, 只须对每个满足 $d(F) \leq d$ 的层 F 证明

$$d(R^i f_* F) \leq d - i.$$

这正是 SGA 4 XIV 3.1 的断言。

对定理 4.1.1 应用 Verdier 对偶, 得到:

推论 4.1.2. 在同样的假设下, $Rf_!$ 左 t -正合。

记

$${}^p f_* := {}^p H^0 Rf_*, \quad {}^p f_! := {}^p H^0 Rf_!$$

为从 X 上层到 Y 上层函子。前者右正合, 后者左正合。若 f, g 均为仿射态射, 则

$${}^p(fg)_* = {}^p f_* {}^p g_*, \quad {}^p(fg)_! = {}^p f_! {}^p g_!. \quad (1.3.17 \text{ (iv)})$$

以下把 Rf_* 与 $Rf_!$ 简记为 f_* 与 $f_!$ 。

推论 4.1.3. 若 $f: X \rightarrow Y$ 拟有限且仿射, 则 $f_!$ 与 f_* 都 t -正合。

事实上, $f_*(= Rf_*)$ 由 2.2.5 左 t -正合, 由 4.1.1⁷⁹ 右 t -正合; $f_!$ 的情形则由 2.2.5 与 4.1.2 对偶得到。

以下设 k 代数闭。取 $Y = \text{Spec}(k)$, 4.1.1 给出 SGA 4 XIV 3.2 的下述推论。

推论 4.1.4. 若 X 是代数闭域 k 上的仿射概形, F 是 X 上任意平展层, 则

$$H^i(X, F) = 0 \quad (i > \dim X).$$

更一般地, 有:

推论 4.1.5. 设 k 代数闭。若 $K \in {}^pD_c^{\leq 0}(X)$, 而 $u: Z \rightarrow X$ 是源 Z 仿射的拟有限态射, 则

$$H^i(Z, K) = 0 \quad (i > 0).$$

事实上, $u^* K \in {}^pD_c^{\leq 0}(Z)$ (2.2.5 的对应结论); 再把 4.1.1 用于 $Z \rightarrow \text{Spec}(k)$ 即可。这个推论有如下逆命题。

逆命题 4.1.6. 设 k 代数闭, $K \in D_c^b(X)$ 。若对 X 的每个 Zariski 仿射开集 V , 都有

$$H^i(V, K) = 0 \quad (i > 0),$$

则 $K \in {}^pD_c^{\leq 0}(X)$ 。

先证明下述引理。

引理 4.1.7. 设 X 是代数闭域 k 上维数为 $d \geq 1$ 的光滑不可约仿射概形, F 是 X 上的光滑层。若 $F \neq 0$, 则存在形如

$$U = X[1/f] \quad (f \neq 0)$$

⁷⁹据勘误第 51 条修正。

的仿射开集 $U \subset X$, 使得 $H^d(U, F) \neq 0$ 。

取 $f_1, \dots, f_d \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, 使方程 $f_i = 0$ 定义的闭子概形 S 有限且非空。若 $F \neq 0$, 则由纯性

$$H_S^{2d}(X, F) \simeq (F|_S)(-d) \neq 0,$$

而正合列

$$H^{2d-1}(X - S, F) \longrightarrow H_S^{2d}(X, F) \longrightarrow H^{2d}(X, F)$$

说明 $H^{2d-1}(X - S, F) \neq 0$; 事实上, 由 4.1.4, 因 $2d > d$, 有 $H^{2d}(X, F) = 0$ 。

以开集 $U_i := X[1/f_i]$ 覆盖 $X - S$; 对 $I \subset [1, d]$, 置

$$U_I := \bigcap_{i \in I} U_i.$$

各 U_I 均仿射, 而 Čech 谱序列

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|I|=p+1} H^q(U_I, F) \implies H^{p+q}(X - S, F)$$

中, $q > d$ 时 $E_1^{pq} = 0$, $p > d - 1$ 时亦有 $E_1^{pq} = 0$ 。故只有 $E_1^{d-1, d}$ 能对 H^{2d-1} 有贡献, 它必不为零; 于是

$$H^d\left(X \left[\left(\prod_{i=1}^d f_i \right)^{-1} \right], F\right) \neq 0.$$

4.1.8 4.1.6 的证明

取 X 的闭子集递增列

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{\dim X} = X, \quad F_{-1} = \emptyset,$$

使

$$W_i := F_i - F_{i-1}$$

(赋予约化结构) 光滑且纯维数为 i , 并使各 $H^j K$ 在 W_i 上光滑。置 $U_i := X - F_{i-1}$ 。我们对 i 作降序归纳, 证明 $K|_{U_i}$ 在自然 t -结构下属于 $D^{\leq -i}$ 。

当 $i = \dim X$ 时, 归纳假设 “ $j > i$ 时 $K|_{U_j} \in D^{\leq -j}$ ” 为空。这个假设保证: 在 U_i 上, $\tau_{\leq -i} K \in {}^p D^{\leq 0}$, 并且 $j > -i$ 时, $H^j K|_{U_i}$ 是从 W_i 上的光滑层零延拓所得。对任意仿射开集 $V \subset U_i$, 三角

$$(\tau_{\leq -i} K, K, \tau_{> -i} K)$$

给出上同调长正合列

$$H^j(V, \tau_{\leq -i} K) \longrightarrow H^j(V, K) \longrightarrow H^j(V, \tau_{> -i} K) \longrightarrow \dots$$

由 4.1.5, $j > 0$ 时第一项为零; 再由假设 $H^j(V, K) = 0$, 可得对 $j > 0$,

$$H^j(V, \tau_{> -i} K) = H^j(V \cap W_i, \tau_{> -i} K) = 0.$$

由 4.1.4, 谱序列

$$E_2^{pq} = H^p(V \cap W_i, H^q(\tau_{>-i}K)) \implies H^{p+q}(V \cap W_i, \tau_{>-i}K)$$

的 E_2^{pq} 在 $p > i$ 时为零。若 $H^j(\tau_{>-i}K) = 0$ 对所有 $j > q$ 成立, 便有

$$H^i(V \cap W_i, H^q(\tau_{>-i}K)) = H^{i+q}(V \cap W_i, \tau_{>-i}K),$$

而 $q > -i$ 时右端为零。令

$$L = H^q(\tau_{>-i}K).$$

这是 W_i 上的光滑层; 由假设, 对每个仿射开集 $V \subset U_i$ 都有

$$H^i(V \cap W_i, L) = 0.$$

须由此推出 $L = 0$ 。当 $i = 0$ 时显然。设 $i \geq 1$; 若 $L \neq 0$, 可取仿射开集 $V_1 \subset U_i$, 使 $L|_{V_1 \cap W_i} \neq 0$ 。把 4.1.7 用于 $V_1 \cap W_i$ 的不可约分支, 可得 $f_1 \in \Gamma(V_1 \cap W_i, \mathcal{O})$, 使

$$H^i((V_1 \cap W_i)[1/f_1], L) \neq 0.$$

把 f_1 提升为 $f \in \Gamma(V_1, \mathcal{O})$, 再取 $V = V_1[1/f]$, 便有

$$H^i(V \cap W_i, L) \neq 0,$$

矛盾。

注记 4.1.9. 当 $k = \mathbb{C}$ 时, 4.1.1 在复数系数上同调中的对应结论成立, 并可由比较定理从 4.1.1 推出。下面用和乐模对此作部分解释。

设 X 光滑且纯维数为 d 。在 X 上, 下列两种概念等同: 带可积联络的代数拟凝聚层; 作为 $\mathcal{O}$ -模是拟凝聚的 $\mathcal{D}$ -模 (等价地, 作为 $\mathcal{D}$ -模是拟凝聚的)。每个这样的层 (V, ∇) 对应一个 *de Rham* 复形 $\Omega^*(V)$; 在 $X(\mathbb{C})$ 上, 还对应解析 *de Rham* 复形 $\Omega^*(V)^{\text{an}}$, 其各项为

$$\Omega^i(V) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}^{\text{an}}.$$

已知若 $\mathcal{D}$ -模 V 是和乐模, 则 $\Omega^*(V)[d]^{\text{an}}$ 是崴层; 而函子

$$V \longmapsto \Omega^*(V)[d]^{\text{an}}$$

给出下列两范畴的等价: 具有正则奇点 (包括无穷远处) 的和乐 $\mathcal{D}$ -模, 与崴层。

若 $f: X \hookrightarrow Y$ 是到纯 d 维光滑概形 Y 的开嵌入, 则在上述等价下, ${}^p f_*$ 对应于拟凝聚层的直像函子 (联络随之取直像)。若 f 还是仿射的, 这个函子便如 4.1.3 所预言的那样正合。

推论 4.1.10. 设 $j: U \hookrightarrow X$ 是仿射开嵌入, $i: D \hookrightarrow X$ 是补集的闭嵌入 (例如 D 是 *Cartier* 除子而 $U = X - D$)。回忆: Rj_* 与 $Ri^!$ 分别简记为 j_* 与 $i^!$ 。

(i) 若 G 是 U 上的崴层, 则 $j_! G$ 与 $j_* G$ 都是崴层。

(ii) 若 F 是 X 上的歳层, 则

$$i^*F \in {}^pD_c^{[-1,0]}, \quad i^!F \in {}^pD_c^{[0,1]},$$

并有歳层的正合列

$$0 \longrightarrow i_*^p H^{-1} i^* F \longrightarrow j_! j^* F \longrightarrow F \longrightarrow i_*^p H^0 i^* F \longrightarrow 0, \quad (4.1.10.1)$$

$$0 \longrightarrow i_*^p H^0 i^! F \longrightarrow F \longrightarrow j_* j^* F \longrightarrow i_*^p H^1 i^! F \longrightarrow 0. \quad (4.1.10.2)$$

(i) 是 4.1.3 的特例。对三角

$$(j_! j^* F, F, i_* i^* F), \quad (i_* i^! F, F, j_* j^* F)$$

取歳上同调长正合列, 便得到 (4.1.10.1)、(4.1.10.2), 并得到

$${}^p H^n i_* i^* F = i_*^p H^n i^* F = 0 \quad (n \neq -1, 0),$$

相应地

$${}^p H^n i_* i^! F = i_*^p H^n i^! F = 0 \quad (n \neq 0, 1),$$

从而得到 (ii)。

4.1.11

在 (4.1.10.1) 中取 $F = j_* G$ 。于是, $i^* j_* G$ 的歳上同调层给出正合列

$$0 \longrightarrow i_*^p H^{-1} i^* j_* G \longrightarrow j_! G \longrightarrow j_* G \longrightarrow i_*^p H^0 i^* j_* G \longrightarrow 0. \quad (4.1.11.1)$$

另一方面, 把 (4.1.10.2) 用于 $F = j_! G$, 得到

$$0 \longrightarrow i_*^p H^0 i^! j_! G \longrightarrow j_! G \longrightarrow j_* G \longrightarrow i_*^p H^1 i^! j_! G \longrightarrow 0.$$

借助 (1.4.6.4) 给出的同构

$$i^* j_* G \simeq i^! j_! G[1],$$

此列与 (4.1.11.1) 相同, 只有箭头

$$j_* G \longrightarrow i_*^p H^0 i^* j_* G$$

相差一个负号。

推论 4.1.12. 在 4.1.10 的假设下, $i^* j_* G[-1]$ 与 $i^! j_! G[1]$ 都是歳层, 并且

$$i^* j_* G[-1] \simeq {}^p H^{-1} i^* j_* G \simeq {}^p H^0 i^! j_! G, \quad (4.1.12.1)$$

$$i^! j_! G[1] \simeq {}^p H^0 i^* j_* G \simeq {}^p H^1 i^! j_! G. \quad (4.1.12.2)$$

正合列 (4.1.11.1) 给出两个短正合列

$$0 \longrightarrow i_*^p H^{-1} i^* j_* G \longrightarrow j_! G \longrightarrow j_{!*} G \longrightarrow 0, \quad (4.1.12.3)$$

$$0 \longrightarrow j_{!*} G \longrightarrow j_* G \longrightarrow i_*^p H^0 i^* j_* G \longrightarrow 0. \quad (4.1.12.4)$$

分别对 (4.1.12.3) 与 (4.1.12.4) 应用 i^* 与 $i^!$, 并利用

$$i^* j_! = i^! j_* = 0,$$

即得 (4.1.12.1)、(4.1.12.2), 从而得到所需的崴性。

注记 4.1.13. 函子性三角

$$K \longmapsto (j_! j^* K, K, i_* i^* K)$$

可提升为函子

$$T : D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow DF_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell),$$

使得按 3.1.7 的记号, $G(TK)$ 是只在次数 $-1, 0$ 非零的复形

$$j_! j^* K \longrightarrow K.$$

此外有同构

$$\omega(TK) \xrightarrow{\sim} i_* i^* K,$$

并且复合

$$K = G^0(TK) \longrightarrow \omega(TK) \xrightarrow{\sim} i_* i^* K$$

正是伴随态射。若 F 是崴层, 则 TF 是笨滤过复形, 并得到 $D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 中的同构

$$i_* i^* F \simeq [j_! j^* F \longrightarrow F] \quad (\text{次数} -1, 0),$$

右端是崴层复形所定义的对象。由 3.1.14 从这个同构导出的四项正合列, 与 (4.1.10.1) 相同, 只是连接态射相差一个负号。

同理,

$$K \longmapsto (i_* i^! K, K, j_* j^* K)$$

可提升为 $K \mapsto TK$, 其中 $G(TK)$ 是只在次数 $0, 1$ 非零的复形

$$K \longrightarrow j_* j^* K,$$

且 $\omega(TK) \simeq i_* i^! K$ 。因此, 对崴层 F 有同构

$$i_* i^! F \simeq [F \longrightarrow j_* j^* F] \quad (\text{次数} 0, 1),$$

它在忽略符号后给出 (4.1.10.2)。

4.2 正合性与伴随

4.2.1

设 $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ 是带 t -结构的三角范畴之间的正合函子。若

$$-\infty \leq a \leq b \leq \infty,$$

并且

$$T\mathcal{D}_1^{\leq 0} \subset \mathcal{D}_2^{\leq b} \quad (b \neq \infty), \quad T\mathcal{D}_1^{\geq 0} \subset \mathcal{D}_2^{\geq a} \quad (a \neq -\infty),$$

就称 T 的上同调幅度 (cohomological amplitude; 法: *amplitude cohomologique*) 为 $[a, b]$ 。换言之, 当 $b \neq \infty$ 时 $T[b]$ 右 t -正合, 当 $a \neq -\infty$ 时 $T[a]$ 左 t -正合。若 T 的上同调幅度有界, 这等价于要求: 对

$$A \in \mathcal{C}_1 := \mathcal{D}_1^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_1^{\geq 0},$$

当 $i \notin [a, b]$ 时 $H^i(TA) = 0$ 。

4.2.2

设 $f : X \rightarrow Y$ 是域 k 上有限型分离概形之间的态射。本节估计与 f 相伴、连接

$$D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad \text{和} \quad D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

的通常函子相对于崴度 $p_{1/2}$ 的 t -结构之上同调幅度。

4.2.3

若 Y 可由仿射开集 V 覆盖, 并且每个 $f^{-1}V$ 都可由 $d+1$ 个仿射开集覆盖, 则 f_* 的上同调幅度上界不超过 d , 而 $f_!$ 的上同调幅度下界不小于 $-d$ 。

这两个断言互为对偶。它们在 Y 上是局部的, 故可假设 Y 仿射且 X 可由 $d+1$ 个仿射开集覆盖。此时, 关于 f_* 的断言由 4.1.1 及开覆盖的 Leray 谱序列得到。

4.2.4

若 f 的纤维维数不超过 d , 则有如下上同调幅度估计:

$$\begin{aligned} f_! &: \leq d, & f^! &: \geq -d, \\ f^* &: \leq d, & f_* &: \geq -d. \end{aligned}$$

对偶性互换每条对角线上的两个断言; 把 1.3.17 (iii) 用于伴随函子对

$$(f_![d], f^![-d]), \quad (f^*[d], f_*[-d]),$$

可知每一行中的两个断言等价。因此只须考虑 f^* ; 其估计立即来自 (4.0.1) 以及

$$\dim(x) \leq \dim f(x) + d \quad (x \in X).$$

注记. 同一结论在 $\mathbb{Z}_\ell$ -上调中对 t -结构 $p_{1/2}$ 与 $p_{1/2}^+$ 也成立；只须在证明中同时处理这两个 t -结构。4.2.3 亦然。

应用 1.3.17 (iii), 得到 X 与 Y 上崴层范畴之间的下列伴随函子对:

$$({}^p H^d f_!, {}^p H^{-d} f^!), \quad ({}^p H^d f^*, {}^p H^{-d} f_*).$$

两个常用特例如下。

若 f 为真态射, 则 $f_! = f_*$ 的上同调幅度为 $[-d, d]$ 。

若 f 光滑且相对维数为 d , 则

$$f^! = f^*[2d](d), \quad f^*[d] = f^!-d$$

t -正合, 并在崴层范畴之间给出三个依次伴随的函子

$$({}^p H^d f_!(d), {}^p H^d f^*, {}^p H^{-d} f_*).$$

命题 4.2.5. 若 f 光滑、相对维数为 d , 且几何纤维连通 (按定义也非空), 则 t -正合函子

$$f^*[d]$$

在 Y 上崴层范畴到 X 上崴层范畴之间诱导一个全忠实函子。

证明中要用层范畴上通常的函子 f_* , 记为 ${}^\circ f_*$ 。对

$$K, L \in D_c^b(Y, \mathbb{Q}_\ell),$$

由 f 光滑, 有同构

$$f^* R\mathcal{H}om(K, L) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(f^* K, f^* L). \quad (4.2.5.1)$$

对任意 f , 更一般地有

$$f^! R\mathcal{H}om(K, L) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(f^* K, f^! L).$$

若 K, L 都是崴层, 则

$$R\mathcal{H}om(K, L) \in D_c^{\geq 0}.$$

同理,

$$R\mathcal{H}om(f^* K, f^* L) = R\mathcal{H}om(f^* K[d], f^* L[d]) \in D_c^{\geq 0}.$$

对 (4.2.5.1) 应用 ${}^\circ f_* H^0$, 得到

$${}^\circ f_* f^* H^0 R\mathcal{H}om(K, L) \longrightarrow {}^\circ f_* H^0 R\mathcal{H}om(f^* K[d], f^* L[d]). \quad (4.2.5.2)$$

暂且承认: 对 Y 上的任意层 H , 都有

$$H \xrightarrow{\sim} {}^\circ f_* f^* H. \quad (4.2.5.3)$$

由 (4.2.5.2)、(4.2.5.3), 取整体截面便得

$$\Gamma H^0 R\mathcal{H}om(K, L) \xrightarrow{\sim} \Gamma H^0 R\mathcal{H}om(f^* K[d], f^* L[d]).$$

两边的 $R\mathcal{H}om$ 都属于 $D_c^{\geq 0}$, 故

$$\Gamma H^0 R\mathcal{H}om = H^0 R\Gamma R\mathcal{H}om = H^0 R\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom},$$

命题随即成立。

(4.2.5.3) 的证明可归约到集合层。态射 f 局部有截面, 故可假设它有截面 e 。这给出 $H \rightarrow {}^\circ f_* f^* H$ 的一个收缩; 只须再证明: ${}^\circ f_* f^* H$ 的两个截面若作为 $f^* H$ 的截面在 e 上相同, 便彼此相同。逐纤维验证即可归约到 Y 为一点的情形, 细节留给读者。

4.2.6

设

$$u^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

是阿贝尔范畴之间的正合全忠实函子, 并有左、右伴随 $u_!$ 与 u_* 。下列条件等价:

(a) u^* 把 $\mathcal{A}$ 等同于 $\mathcal{B}$ 的一个厚子范畴, 即对取子商稳定的全子范畴;

(b) 对每个 $B \in \mathcal{B}$, 伴随态射

$$u_! u^* B \longrightarrow B$$

是单态射;

(b') 对每个 $B \in \mathcal{B}$, 伴随态射

$$B \longrightarrow u_* u^* B$$

是满态射。⁸⁰

这些条件并非总成立。例如, 设 $\mathcal{B}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 中态射 $X \rightarrow Y$ 所成的范畴, $\mathcal{A}$ 是其中同构 $X \xrightarrow{\sim} Y$ 所成的子范畴 (它等价于 $\mathcal{C}$), 而 u^* 是包含函子。此时⁸¹

$$u_!(X \rightarrow Y) = (X \xrightarrow{\sim} X), \quad u_*(X \rightarrow Y) = (Y \xrightarrow{\sim} Y).$$

若这些条件成立, 并经 u^* 把 $\mathcal{A}$ 视为 $\mathcal{B}$ 的全子范畴, 则每个 $B \in \mathcal{B}$ 都有属于 $\mathcal{A}$ 的最大子对象, 即 $u_! u^* B$; 也有属于 $\mathcal{A}$ 的最大商对象, 即 $u_* u^* B$ 。⁸²下述判据留给读者验证。

引理 4.2.6.1. 若 $\mathcal{A}$ 的每个对象均有有限长度, 并且对 $\mathcal{A}$ 的每个简单对象 S , $u^* S$ 仍为简单对象, 则 4.2.6 的条件 (a)、(b)、(b') 均成立。

判据 4.2.6.1 可用于 4.2.5 的情形。这里有三个依次伴随的函子

$$({}^p H^d f_!(d), {}^p H^d f^*, {}^p H^{-d} f_*).$$

⁸⁰译者注: 上述两式照录原文。按此处给定的方向 $u^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, 伴随关系为 $u_! \dashv u^* \dashv u_*$ 。因此, 对 $B \in \mathcal{B}$, 相应的余单位应为 $u^* u_* B \rightarrow B$, 单位应为 $B \rightarrow u^* u_! B$ 。条件 (b) 应要求前者为单态射, 条件 (b') 应要求后者为满态射。原式中的 $u^* B$ 一般没有定义。此处未见于 2018 年版勘误表。

⁸¹译者注: 这两式照录原文。按 $u_! \dashv u^* \dashv u_*$, 应有 $u_!(X \rightarrow Y) = (Y \xrightarrow{\sim} Y)$, 而 $u_*(X \rightarrow Y) = (X \xrightarrow{\sim} X)$ 。事实上, 从 $X \rightarrow Y$ 到恒等箭头 $Z \rightarrow Z$ 的态射由 $Y \rightarrow Z$ 唯一确定; 反向的态射则由 $Z \rightarrow X$ 唯一确定。

⁸²译者注: 此处复合亦照录原文。由前述余单位与单位, 最大子对象应为 $u^* u_* B$, 最大商对象应为 $u^* u_! B$ 。这与 4.2.6.2 后的具体公式一致。

“每个对象均有有限长度”正是 4.3.1 (i)。若简单对象

$$S = j_{!*}L[\dim V]$$

对应于图

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow{j'} & X \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{j} & Y, \end{array}$$

则它在 $f^*[d]$ 下的像为

$$j'_{!*}(f^*L[\dim f^{-1}(V)]),$$

仍是简单对象。事实上, $j_{!*}$ 与沿 f 的基变换交换, 这由光滑基变换定理以及从 2.2.4 得到的 2.1.11 型 $j_{!*}$ 描述推出; 又因 f 的纤维几何连通, V 上不可约局部系统在 $f^{-1}(V)$ 上的逆像仍不可约。

推论 4.2.6.2. 在 4.2.5 的假设下, 从 Y 上崑层到 X 上崑层的函子 $f^*[d]$ 满足 4.2.6 中彼此等价的条件 (a)、(b)、(b')。

因此, 对 X 上的崑层 F , 可以谈论 F 中由 Y 上对象经逆像而来的最大子层 (相应地, 最大商层)。这个子层 (相应地, 商层) 是 $f^*[d]$ 作用于

$${}^p H^{-d} f_* F \quad (\text{相应地, } {}^p H^d f_! F(d))$$

所得的对象。

以上对 4.2.6.2 的证明胜在简短, 但不能原样用于 $p_{1/2}$ 以外的崑度, 也不能原样用于 $\mathbb{Z}_\ell$ -层。

4.2.7

设 X_1, X_2 是域 k 上的有限型概形。记外张量积 (*exterior tensor product*; 法: *produit tensoriel externe*) 为双函子

$$\boxtimes : D(X_1) \times D(X_2) \longrightarrow D(X_1 \times X_2), \quad (K, L) \longmapsto \mathrm{pr}_1^* K \otimes \mathrm{pr}_2^* L.$$

这里可取多种语境: $\mathbb{Z}/\ell$ 系数; $\mathbb{Z}/\ell^n$ 系数并限于 D^- 或 D_{ctf}^b ; 在适当的 k 上取 $\mathbb{Z}_\ell$ 或 $\mathbb{Q}_\ell$ 系数并限于 D_c^b (参见 2.2); 等等。在所有这些语境中, 外张量积都与通常运算交换:

(a) 若 $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ 、 $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$, 则

$$f_{1*} K \boxtimes f_{2*} L \xrightarrow{\sim} (f_1 \times f_2)_*(K \boxtimes L).$$

对 $(f_1 \times f_2)_!$ 、 $(f_1 \times f_2)^*$ 与 $(f_1 \times f_2)^!$ 也有相应公式。特别地, $X_1 \times X_2$ 的对偶化复形是 X_1 与 X_2 的对偶化复形之外张量积。

(b) 对 X_1 上的 K_1, L_1 及 X_2 上的 K_2, L_2 , 若 $K_1, K_2 \in D_c^b$, 则

$$R\mathcal{H}om(K_1, L_1) \boxtimes R\mathcal{H}om(K_2, L_2) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(K_1 \boxtimes K_2, L_1 \boxtimes L_2).$$

特别地, $K \boxtimes L$ 的 Verdier 对偶是 $DK \boxtimes DL$. 把 $R\mathcal{H}om$ 换成 $\otimes$, 也有相应的显然公式。

用标准论证 (参见 [3] §1), 这些断言可归约到 (a) 中关于直像的公式。把 (f_1, f_2) 分解为 $(f_1, \text{Id}) \circ (\text{Id}, f_2)$, 可假设 f_1 或 f_2 是恒等态射; 还可归约到 $\mathbb{Z}/\ell$ 系数。此时若 f_1 为恒等态射, 结论由 $X_1 \rightarrow \text{Spec}(k)$ 对任意系数层的普遍局部凡调性 (*universal local acyclicity*; 法: *acyclicité locale universelle*) 推出 ([3] 2.16)。

命题 4.2.8. 若 X_1, X_2 是 k 上的有限型概形, 则双函子 $\boxtimes t$ -正合。

取 $K_i \in D_c^b(X_i)$ ($i = 1, 2$), 并在 X_i 上取分层 $\mathcal{T}_i$, 使各片层等维且其在 $\bar{k}$ 上的约化概形光滑, 并且对每个片层的包含映射 $a: S \hookrightarrow X_i$, 各 $H^n a^* K_i$ 与 $H^n a^! K_i$ 都光滑。此时, 有如下判据, 其中右侧条件须对每个片层 $a: S \hookrightarrow X_i$ 成立:

$$\begin{aligned} K_i \in {}^p D_c^{\leq 0} &\iff H^n a^* K_i = 0 \quad (n > -\dim S), \\ K_i \in {}^p D_c^{\geq 0} &\iff H^n a^! K_i = 0 \quad (n < -\dim S). \end{aligned}$$

把这一判据用于 $K_1 \boxtimes K_2$ 以及 $X_1 \times X_2$ 的分层 $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, 再使用 4.2.7, 即得命题。这里崴度函数的线性至关重要。

4.2.9

类似而更简单地, 设 K/k 是域扩张, X 是 k 上的有限型概形,

$$X_K := X \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } K,$$

而 $\varepsilon: X_K \rightarrow X$ 是投影, 则 ε^* 与通常运算交换, 并且 t -正合。这个结论适用于任意崴度, 也适用于 $\mathbb{Z}_\ell$ 、 $\mathbb{Z}/\ell^n$ 等系数的上同调。

4.3 简单对象

定理 4.3.1.

(i) X 上的崴层范畴既是阿廷的, 又是诺特的; 每个对象均有有限长度。

(ii) 设 $j: V \hookrightarrow X$ 是不可约子簇的包含映射, V 在 $\bar{k}$ 上的约化概形光滑; 设 L 是 V 上不可约的光滑 $\mathbb{Q}_\ell$ -层, 对应于 $\pi_1(V)$ 的一个不可约 ℓ -进表示。则

$$j_{!*}(L[\dim V])$$

是 X 上的简单崴层; 所有简单崴层都由此得到。

扩张 k 到其完美闭包 (*perfect closure*; 法: *clôture parfaite*) 并不改变平展拓扑, 故可假设 k 完美。此时, “在 $\bar{k}$ 上的约化概形光滑” 可直接换成 “光滑”。

引理 4.3.2. 若 X 不可约且光滑, L 是 X 上的光滑 $\mathbb{Q}_\ell$ -层, 则对每个非空 Zariski 开集的包含映射 $j: U \hookrightarrow X$, 崱层

$$F := L[\dim X]$$

满足

$$F = j_{!*}j^*F.$$

只须验证 (参见 2.1.9): 对每个 $x \in X - U$,

$$H^i i_x^* F = 0 \quad (i \geq -\dim x), \quad H^i i_x^! F = 0 \quad (i \leq -\dim x).$$

由于 $\dim x < \dim X$, 前一消失性在

$$i > -\dim X = -\dim x - (\dim X - \dim x)$$

时成立; 后一消失性则由上同调纯性定理在

$$i < -\dim X + 2 \operatorname{codim} x = -\dim x + (\dim X - \dim x)$$

时成立。这正给出所需结论。

引理 4.3.3. 若 X 不可约且光滑, L 是 X 上不可约的光滑 $\mathbb{Q}_\ell$ -层, 则崱层

$$F := L[\dim X]$$

是简单对象。

设 $G \subset F$ 。可取非空 Zariski 开集 $j: U \hookrightarrow X$, 使 $G|U$ 形如 $M[\dim X]$, 其中 M 是 $L|U$ 的光滑子层。因 X 正规, $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ 为满射。故 L 的单值表示 (*monodromy representation*; 法: *représentation de monodromie*) 的像在限制到 U 后不变, 从而 $L|U$ 仍不可约。于是 $M = 0$ 或 $M = L|U$ 。若 $M = 0$ (相应地, $M = L|U$), 则 G (相应地, F/G) 支撑在闭集 $Z = X - U$ 上。由 4.3.2, $F = j_{!*}j^*F$, 而 F 没有支撑在 Z 上的非零子对象 (相应地, 商对象) (1.4.2.5)。⁸³故 $G = 0$ (相应地, $G = F$), 引理得证。

4.3.4 4.3.1 的证明

(ii) 中的崱层为简单对象, 由 4.3.3 以及对开嵌入 $V \hookrightarrow \bar{V}$ 、闭嵌入 $\bar{V} \hookrightarrow X$ 两次应用 (1.4.2.5) 得到。⁸⁴

为完成证明, 只须说明 X 上每个崱层都是这些简单崱层的逐次扩张。对 X 作诺特归纳, 从而可假设: 支撑为真闭子集 $Y \neq X$ 的崱层已有这一性质。对任意 X 上崱层 F , 可取适当的光滑不可约开集 $j: U \hookrightarrow X$, 使

$$F|U = L[\dim U],$$

⁸³译者注: 原书此处作 “1.4.2.5”, 依原文保留; 所用结论见 1.4.25。此项编号订正未列入 2018 年版勘误表。

⁸⁴译者注: 编号照录原文; 所用结论仍为 1.4.25。

其中 L 是光滑 $\mathbb{Q}_\ell$ -层。由 4.1.11, 对 F 作剥离, 可归约到形如

$$j_{!*}L'[\dim U]$$

的崴层以及支撑在 $X - U$ 上的崴层; 这里 L' 遍历 L 的不可约子商。归纳假设遂给出结论。

注记 4.3.5. 在 $\mathbb{C}$ 上, 和乐 $\mathcal{D}$ -模范畴同样既是阿廷的又是诺特的: 这里可取光滑代数簇上的代数和乐模, 也可在紧复解析簇上按解析意义取和乐模 (参见 4.1.9)。

4.4 消失圈 (上界估计)

本节给出关于邻近圈函子正合性的一个部分结果, 它是 SGA 7 I 4.2 的加强。再结合下述事实——此事实为真, 但本书不作证明——邻近圈函子 $R\psi_{\bar{\eta}}$ 与对偶交换, 便可推出 $R\psi_{\bar{\eta}}$ 的 t -正合性。这里得到的部分结果已足以证明 4.5.5; 后者是纯性定理 5.3.4 证明中的关键一步。

4.4.1

设 (S, η, s) 是 Hensel 踪, $k(\bar{\eta})$ 是 $k(\eta)$ 的可分闭包, $(\bar{S}, \bar{\eta}, \bar{s})$ 是 S 在 $k(\bar{\eta})$ 中的正规化。于是 $\bar{S}$ 是一个非离散赋值环的谱, 其赋值群为 $\mathbb{Q}$ 。设 $a: X \rightarrow S$ 是有限型 S -概形, 并置

$$\bar{X} = X \times_S \bar{S}.$$

记 $X_{\bar{\eta}}$ 与 $X_{\bar{s}}$ 为 $\bar{X}/\bar{S}$ 的两个纤维; 有交换图

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{s}} & \xleftarrow{i} & \bar{X} & \xleftarrow{j} & X_{\bar{\eta}} \\ \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow a \\ \bar{s} & \xleftarrow{i} & \bar{S} & \xleftarrow{j} & \bar{\eta}. \end{array}$$

消失圈理论中的邻近圈函子为

$$\psi_{\bar{\eta}} := i^* j_* : D(X_{\bar{\eta}}) \longrightarrow D(X_{\bar{s}}).$$

我们要证明: 相对于 $X_{\bar{\eta}}/\bar{\eta}$ 与 $X_{\bar{s}}/\bar{s}$ 上的崴度 $p_{1/2}$, 它把 ${}^p D_c^{\leq 0}$ 映入 ${}^p D_c^{\leq 0}$ 。这里的上界记号采用勘误中的修正。⁸⁵

最重要的是 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -上同调。利用以下事实: $R\psi$ 与系数环的扩张、限制运算交换; 这些运算把相应的 ${}^p D_c^{\leq 0}$ 彼此映射; 并且对 $K \in D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$, 若

$$K \otimes^L \mathbb{Z}/\ell \in {}^p D_c^{\leq 0}(X, \mathbb{Z}/\ell),$$

⁸⁵ 据勘误第 52 条修正。

则 $K \in {}^pD_c^{\leq 0}(X, \mathbb{Z}_\ell)$ ；便可依次把 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -上同调归约到 E_λ -上同调 ($E_\lambda/\mathbb{Q}_\ell$ 有限)、 $\mathbb{Q}_\ell$ -上同调、 $\mathbb{Z}_\ell$ -上同调，最后归约到 $\mathbb{Z}/\ell$ -上同调。在 $\mathbb{Z}/\ell$ -上同调中工作，无须使用 $\mathbb{Z}_\ell$ -层的形式体系。

函子 $\psi_{\bar{\eta}}$ 保持可构造性 (SGA 4½, Th. finitude, 3.2)。其实也无须使用这一点。仿照 M. Artin (SGA 4 XIV 2)，对域上有限型概形 Y ，直接定义 ${}^pD^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell)$ 为满足下述条件的复形 K 所成的范畴：对每个点 (不必闭) $i_y : y \hookrightarrow Y$ ，

$$H^i i_y^* K = 0 \quad (i > -\dim \overline{\{y\}}).$$

于是

$$D_c(Y, \mathbb{Z}/\ell) \cap {}^pD^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell) = {}^pD_c^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell).$$

若把一个层 F 写成其可构造子层 F_α 的归纳极限，则

$$F[i] \in {}^pD^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell) \iff F_\alpha[i] \in {}^pD_c^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell) \quad (\forall \alpha).$$

命题 4.4.2. 函子 $\psi_{\bar{\eta}}$ 把

$${}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell^n)$$

映入

$${}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Z}/\ell^n).$$

通过剥离并取归纳极限，只须证明：若 $X_{\bar{\eta}}$ 上的可构造层 F 的支撑维数不超过 N ，则对 $X_{\bar{s}}$ 的每个几何点 $\bar{x}$ (其像为 x)，

$$(H^i \psi_{\bar{\eta}} F)_{\bar{x}} = 0 \quad (i > N - \dim \overline{\{x\}}).$$

引理 4.4.3. 当 $i > N$ 时，

$$H^i \psi_{\bar{\eta}} F = 0.$$

取 $X_{\bar{s}}$ 的几何点 x ；不妨设 $x \in X(k(\bar{s}))$ 。把 $\bar{X}$ 在 x 处的严格 Hensel 化 (*strict henselization*；法：hensélisé strict) $\bar{X}_{(x)}$ 写成 x 在 $\bar{X}$ 中的仿射平展邻域 U_α 的逆极限，则

$$(H^i \psi_{\bar{\eta}} F)_x = \varinjlim_{\alpha} H^i(U_{\alpha\bar{\eta}}, F).$$

在 H^i 中，可把 $U_{\alpha\bar{\eta}}$ 换成 F 的支撑在其中的逆像；再由仿射概形的上同调维数定理 SGA 4 XIV 3.2 即得结论。

4.4.4

证明比 4.4.2 稍强的命题更为方便。设 S^h 是 S 的严格 Hensel 化，其分式域为

$$k(\eta^h) \subset k(\bar{\eta}),$$

并设 $k(\eta')$ 是 $k(\bar{\eta})$ 中 $k(\eta^h)$ 的任意扩张，包含某个一致化元的所有 ℓ -幂次阶根。把 4.4.1 中的 $k(\bar{\eta})$ 换成 $k(\eta')$ ，便定义出 S' 、 X' 以及函子

$$\psi_{\eta'} : D(X_{\eta'}) \longrightarrow D(X_{\bar{s}}).$$

我们将证明 4.4.2 对此函子的对应结论。

Galois 群

$$Q = \text{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta'))$$

是阶与 ℓ 互素的有限群之逆极限，因此“取 Q -不变量”函子正合。若 $K' \in D(X_{\eta'})$ ，而 $K \in D(X_{\bar{\eta}})$ 是其逆像，则

$$H^i \psi_{\eta'} K' = (H^i \psi_{\bar{\eta}} K)^Q. \quad (4.4.4.1)$$

验证留给读者。我们不需要导出范畴中的对应陈述。4.4.2 对 $\psi_{\eta'}$ 的版本由原命题与 (4.4.4.1) 推出；4.4.3 的对应版本亦同。

设 A 在 S 上光滑， $\bar{s}_1$ 是 $A_{\bar{s}}/\bar{s}$ 的一个几何泛点， s_1 是它在 A_s 中的像。设 S_1 是 A 在 s_1 处的 Hensel 化；它是一个踪。记 S_1^h 为它相对于 $\bar{s}_1$ 的严格 Hensel 化。它映到 S^h ，且 S^h 的一致化元之逆像是 S_1^h 的一致化元。于是

$$S'_1 := S' \times_{S^h} S_1^h$$

相对于 S_1 ，正是上面对 S 所考虑的类型。

4.4.5 4.4.2 的证明（按 4.4.4 加强）

问题在 X 上是局部的，故可并且确实假设 X 仿射。令 $\mathbb{A}_S^d$ 为 S 上相对维数 d 的仿射空间。我们证明下述断言，4.4.2 将由它形式地推出：对每个 d 、每个态射

$$f: X \longrightarrow \mathbb{A}_S^d,$$

若 $X_{\bar{s}}$ 的几何点 x 在 $\mathbb{A}_{\bar{s}}^d$ 中的像为泛点，则

$$(H^j \psi_{\eta'} F)_x = 0 \quad (j > N - d),$$

其中 F 如 4.4.2。

把 4.4.4 用于 $\mathbb{A}_S^d/S$ ，得到图

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{A}_S^d & \longleftarrow & S_1 & \longleftarrow & S_1^h & \longleftarrow & S'_1 \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & S & \longleftarrow & S^h & \longleftarrow & S' \end{array}$$

令 $X_1 := X \times_{\mathbb{A}_S^d} S_1$ ，这是 X 的“局部化”。再令 $X'_1 := X_1 \times_{S_1} S'_1$ 。相应地有图

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{\varepsilon} & X'_1 \\ \downarrow & \searrow f & \downarrow \\ S' & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{A}_{S'}^d \xleftarrow{\quad} S'_1 \end{array}$$

态射 ε 为投射平展 (*pro-étale*; 法: *pro-étale*) 态射，故 X'/S' 的邻近圈函子可局部化为 X'_1/S'_1 的对应函子：

$$\psi_{\eta'_1} \varepsilon^* = \varepsilon^* \psi_{\eta'}.$$

若 F 在 $X'_{\eta'}$ 中的支撑闭且维数不超过 N ，则其在 $(X'_1)_{\eta'_1}$ 中的逆像维数不超过 $N - d$ 。同样，若 $x \in X_{\bar{s}}$ 满足 $f(x)$ 为 $\mathbb{A}_{\bar{s}}^d$ 的泛点，也就是说， x 是 $(X'_1)_{\bar{s}_1}$ 中某点 x_1 的像，则

$$\dim \overline{\{x_1\}} = \dim \overline{\{x\}} - d.$$

这一维数平移，加上上述 X'/S' 与 X'_1/S'_1 的邻近圈关系，把问题归约到 4.4.3 对 X'_1/S'_1 的加强版本。

注记 4.4.5. 我们从仿射概形的上同调维数定理推出了 4.4.2。这种表述颇为人为：在 *SGA 4 XIV* 中，该定理与 4.4.2 的一种形式（隐含在 *SGA 4 XIV* 4.5 的证明中）是通过 N 的同步归纳一起证明的。

4.5 贝蒂数估计

本节讨论贝蒂数 (*Betti numbers*; 法: *nombres de Betti*) 的估计。目标是 4.5.5; 纯度定理 5.3.4 的证明将用到它。

命题 4.5.1. 设 $(X_a)_{1 \leq a \leq n}$ 是代数闭域 k 上光滑、射影、连通的曲线， $X = \prod_a X_a$ ，且

$$K \in {}^p D_c^{\leq 0}(X, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}).$$

则存在常数 C ，使得对任意连通平展覆盖 $\tilde{X}_a \rightarrow X_a$ ，若其次数为 d_a ，并记 $\tilde{X} = \prod_a \tilde{X}_a$ ，则：

(i) 对每个 i ，

$$\dim H^i(\tilde{X}, K) \leq C \prod_a d_a.$$

(ii) 当 $i > 0$ 时，

$$\dim H^i(\tilde{X}, K) \leq C \sup \left\{ \prod_{a \in A} d_a \mid |A| = n - i \right\};$$

当 $i > n$ 时，约定右端的上确界为零。

若命题对每个 $H^j K[-j]$ 成立，便对 K 成立；故可设 $K = F[N]$ ，其中 F 是支撑维数不超过 N 的 $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -层。由 $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -层依次归约到 $\mathbb{Q}_{\ell}$ -层和 $\mathbb{Z}_{\ell}$ -层时，只须把维数换成秩。再由万有系数公式的正合列

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{X}, K) \otimes \mathbb{Z}/\ell \longrightarrow H^i(\tilde{X}, K \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(H^{i+1}(\tilde{X}, K), \mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow 0,$$

可知

$$\mathrm{rk} H^i(\tilde{X}, K) \leq \dim_{\mathbb{Z}/\ell} H^i(\tilde{X}, K \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/\ell).$$

于是最终归约到 $\mathbb{Z}/\ell$ -模层，从而避开 ℓ -进形式体系。

因此，设 F 是支撑维数不超过 N 的 $\mathbb{Z}/\ell$ -模层， $K = F[N]$ 。我们对 n 归纳证明 4.5.1。 $n = 0$ 的情形留给读者。

设 $n \geq 1$, 以 $\text{pr} : X \rightarrow X_1$ 表示投影。存在非空开集 $j : U_1 \hookrightarrow X_1$, 使 K 在 U_1 上相对于 pr 局部凡调 (*locally acyclic*; 法: *localement acyclique*) (SGA 4½, Finitude, 2.13); 缩小 U_1 , 还可设 $U_1 \neq X_1$ 。仍以 j 表示 $U = \text{pr}^{-1}(U_1)$ 到 X 的包含映射, 以 i 表示闭补集的包含映射。利用三角

$$(j_! j^* K, K, i_* i^* K)$$

对 K 作剥离, 可归约到以下两种情形:

- (a) $K = (j_! F)[N]$, 其中 F 是 U 上相对于 pr 局部凡调的层;
- (b) K 支撑在 $X - U$ 上。

情形 (b) 可进一步归约到 K 支撑在 $\text{pr}^{-1}(t)$ 上, 其中 $t \in X_1$ 是适当的闭点。令

$$Y = \text{pr}^{-1}(t) \simeq \prod_{a \neq 1} X_a, \quad \tilde{Y} = \prod_{a \neq 1} \tilde{X}_a.$$

则

$$\dim H^i(\tilde{X}, K) = d_1 \dim H^i(\tilde{Y}, K),$$

而 4.5.1 由应用于 Y 的归纳假设得到。

现设 K 形如 (a)。仍以

$$j : \tilde{U} \hookrightarrow \tilde{X}, \quad j : \tilde{U}_1 \hookrightarrow \tilde{X}_1$$

表示 U 与 U_1 的逆像, 并以 $\tilde{\text{pr}}$ 表示 $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1$ 或 $\tilde{U} \rightarrow \tilde{U}_1$ 的投影。 $F|_{\tilde{U}}$ 仍相对于 $\tilde{\text{pr}}$ 局部凡调, 故 $R^q \tilde{\text{pr}}_* F$ 是 $\tilde{U}_1$ 上的局部常值层。

考虑 Leray 谱序列

$$E_2^{pq} = H^p(\tilde{X}_1, R^q \tilde{\text{pr}}_* K) \implies H^{p+q}(\tilde{X}, K).$$

由于

$$R^q \tilde{\text{pr}}_* K = j_! R^{q+N} \tilde{\text{pr}}_* F$$

是 $\tilde{U}_1$ 上局部常值层的零延拓, 而 $\tilde{U}_1 \neq \tilde{X}_1$, 故 $p \neq 1, 2$ 时 $E_2^{pq} = 0$ 。只须对 E_2^{pq} 验证 4.5.1 的估计; 等价而更方便的是, 估计 E_2^{2q} (此时 $i = q + 2$) 以及

$$\left| \chi(\tilde{X}_1, R^q \tilde{\text{pr}}_* K) \right| = \left| \dim E_2^{1q} - \dim E_2^{2q} \right| \quad (i = q + 1).$$

取 U_1 中的闭点 t 及其上方的点 $\tilde{t} \in \tilde{U}_1$, 并沿用上面的 $Y, \tilde{Y}$; 记 K_1 为 K 在 $\text{pr}^{-1}(t) \simeq Y$ 上的限制。取 t 足够一般, 则

$$\dim(\text{Supp } F \cap \text{pr}^{-1}(t)) \leq \dim \text{Supp } F - 1,$$

从而 $K_1[-1] \in {}^p D_c^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell)$ 。群

$$E_2^{2q} = H_c^2(\tilde{U}_1, R^q \tilde{\text{pr}}_* K)$$

由 $(R^q \tilde{\text{pr}}_* K)_{\tilde{t}} = H^q(\tilde{Y}, K_1)$ 上单值作用的余不变量 (*coinvariants*; 法: *coinvariants*) 给出:

$$E_2^{2q} = H^q(\tilde{Y}, K_1)_{\pi_1(\tilde{U}_1, \tilde{t})}(-1).$$

这里的直像符号已按勘误修正。⁸⁶ 因而

$$\dim E_2^{2q} \leq \text{rk } R^q \tilde{\text{pr}}_* K.$$

又

$$\text{rk } R^q \tilde{\text{pr}}_* K = \dim H^q(\tilde{Y}, K_1) = \dim H^{q+1}(\tilde{Y}, K_1[-1]), \quad (4.5.1.1)$$

故 E_2^{2q} 的所需估计由归纳假设得到。

由于 $\tilde{X}_1$ 是射影曲线 X_1 的平展覆盖, 也可直接使用下文回忆的 Euler–Poincaré 公式, $\chi(\tilde{X}_1, R^q \tilde{\text{pr}}_* K)$ 等于 d_1 乘以 $X_1 \times \prod_{a \neq 1} \tilde{X}_a \rightarrow X_1$ 上的相应 Euler 示性数 (*Euler characteristic*; 法: *caractéristique d’Euler*)。因此只须处理 $d_1 = 1$, 即 $\tilde{X}_1 = X_1$; 以下均作此假设。须证

$$|\chi(X_1, R^q \tilde{\text{pr}}_* K)| = O\left(\prod_{a \neq 1} d_a\right),$$

并且当 $q \geq 0$ 时,

$$|\chi(X_1, R^q \tilde{\text{pr}}_* K)| = O\left(\sup\left\{\prod_{a \in A} d_a \mid A \subset [2, n], |A| = n - (q+1) - 1\right\}\right).$$

Euler–Poincaré 公式 (见 [9]) 给出

$$\chi(X_1, R^q \tilde{\text{pr}}_* K) = \chi(U_1) \text{rk}(R^q \tilde{\text{pr}}_* K) - \sum_{x \in X_1 - U_1} \text{Sw}_x(R^q \tilde{\text{pr}}_* K).$$

由 (4.5.1.1) 和归纳假设即可估计第一项。为估计每个 Swan 导子 (*Swan conductor*; 法: *conducteur de Swan*) $\text{Sw}_x(R^q \tilde{\text{pr}}_* K)$, 把消失圈理论用于曲线 X_1 在 x 处 Hensel 化所得的踪 $(X_{1(x)}, \eta, x)$, 以及由基变换得到的

$$X_{(x)} \longrightarrow X_{1(x)}, \quad \tilde{X}_{(x)} \longrightarrow X_{1(x)}.$$

设 K_1 是 K 在 $X_{(x), \eta}$ 上的逆像。仍有

$$K_1[-1] \in {}^p D_c^{\leq 0}(X_{(x), \eta}, \mathbb{Z}/\ell).$$

于是, 由 4.4.2, $X_{(x), x} = \text{pr}^{-1}(x) \simeq Y$ 上的复形

$$\psi_{\bar{\eta}} K_1[-1]$$

属于 ${}^p D_c^{\leq 0}(Y, \mathbb{Z}/\ell)$; $\tilde{X}_{(x), x} = \tilde{\text{pr}}^{-1}(x) \simeq \tilde{Y}$ 上的相应复形由逆像得到。这些复形带有惯性群 (*inertia group*; 法: *groupe d’inertie*)

$$I = \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$$

⁸⁶ 据勘误第 53 条修正。

的作用，特别带有野惯性群 (*wild inertia group*; 法: *groupe d'inertie sauvage*) P 的作用，并有等变同构

$$(R^q \tilde{\mathrm{pr}}_* K)_{\bar{\eta}} = H^q(\tilde{Y}, \psi_{\bar{\eta}} K_1) = H^{q+1}(\tilde{Y}, \psi_{\bar{\eta}} K_1[-1]).$$

P 在 $\psi_{\bar{\eta}} K_1$ 上的作用经由某个有限商群 Q 分解。其实只需各 $H^i \psi_{\bar{\eta}} K_1$ 上的作用有这种分解；但把 $\psi_{\bar{\eta}} K_1$ 看作 $D(Y, \mathbb{Z}/\ell[Q])$ 中的对象，证明更清楚。设 Sw 为 Q 的 Swan 表示 (*Swan representation*; 法: *représentation de Swan*)；它是射影 $\mathbb{Z}/\ell[Q]$ -模，并且

$$\mathrm{Sw}_x R^q \tilde{\mathrm{pr}}_* K := \dim \mathrm{Hom}_Q \left(\mathrm{Sw}, (R^q \tilde{\mathrm{pr}}_* K)_{\bar{\eta}} \right),$$

而

$$\mathrm{Hom}_Q \left(\mathrm{Sw}, (R^q \tilde{\mathrm{pr}}_* K)_{\bar{\eta}} \right) = H^{q+1} \left(\tilde{Y}, \mathcal{H}om_Q(\mathrm{Sw}, \psi_{\bar{\eta}} K_1[-1]) \right).$$

对 Y 及 $\mathcal{H}om_Q(\mathrm{Sw}, \psi_{\bar{\eta}} K_1[-1])$ 应用归纳假设，便完成证明。

推论 4.5.2. 对 $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ ，存在常数 C ，使得对任意上述 $\tilde{X}_a$ 及每个 i ，

$$\dim H^i(\tilde{X}, K) \leq C \prod_a d_a.$$

平移后即归约到 4.4.1(i)。⁸⁷

推论 4.5.3. 对 $K \in {}^p D_c^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ ，存在常数 C ，使得对任意上述 $\tilde{X}_a$ 及 $i \leq 0$ ，

$$\dim H^i(\tilde{X}, K) \leq C \sup \left\{ \prod_{a \in A} d_a \mid |A| = n - |i| \right\}.$$

这是 4.5.1(ii) 的对偶命题。

推论 4.5.4. 设 $f: U \rightarrow X$ 是分离的拟有限态射，且

$$K \in {}^p D_c^{\geq 0}(U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

这里的系数域采用勘误中的修正。⁸⁸ 则存在常数 C ，使得对任意上述 $\tilde{X}_a$ ，若置 $\tilde{U} = U \times_X \tilde{X}$ ，则对每个 i ，

$$\dim H^i(\tilde{U}, K) \leq C \prod_a d_a,$$

而当 $i \leq 0$ 时，

$$\dim H^i(\tilde{U}, K) \leq C \sup \left\{ \prod_{a \in A} d_a \mid |A| = n - |i| \right\}.$$

由

$$H^*(\tilde{U}, K) = H^*(\tilde{X}, f_* K)$$

⁸⁷ 据勘误第 54 条修正。译者注：原书作 “4.4.1(i)”，这里依原文保留；但按上下文疑应为 “4.5.1(i)”。这项编号订正不见于 2018 年版所附勘误表。

⁸⁸ 据勘误第 55 条修正。

及 2.2.5, $f_*K \in {}^pD_c^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$; 应用 4.5.2、4.5.3 即得。

推论 4.5.5. 设 F 是 k 上有限型概形 X 上的层, $x \in X$ 是闭点。⁸⁹ 则存在 x 的仿射平展邻域 U , 以及 U 的一族平展覆盖 U_n ; 其次数 d_n 趋于无穷, 并且当 $i < 0$ 时,

$$\dim H^i(U_n, F) = o(d_n).$$

问题是局部的, 故可设 X 仿射。取拟有限态射

$$f: X \longrightarrow \mathbb{A}^d$$

使 $f(x) = 0$; 例如可取一个到仿射空间的浸入。取亏格 (*genus*; 法: *genre*) $g > 0$ 的光滑射影曲线 C , 以及态射 $h: C \rightarrow \mathbb{P}^1$, 使它在 0 上方某点 $c \in C$ 处平展。再取含 c 的开集 $C' \subset C$, 使 $h|_{C'}$ 平展且 $h(C') \subset \mathbb{A}^1$ 。取 C 的连通平展覆盖 $C_n \rightarrow C$, 其次数 d'_n 趋于无穷 (这里用到 $g > 0$); 令 C'_n 为 C' 在 C_n 中的逆像, 并置

$$U = X \times_{\mathbb{A}^d} (C')^d, \quad U_n = X \times_{\mathbb{A}^d} (C'_n)^d.$$

有交换图

$$\begin{array}{ccccc} U_n & \longrightarrow & (C'_n)^d & \hookrightarrow & C_n^d \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & (C')^d & \hookrightarrow & C^d \\ \downarrow & & \downarrow h^d & & \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}^d & & \end{array}$$

平展覆盖 U_n/U 的次数为

$$d_n = (d'_n)^d.$$

由 4.5.4, 当 $i < 0$ 时,

$$\dim H^i(U_n, F) \leq C(d'_n)^{d-|i|} = Cd_n^{1-|i|/d} = o(d_n).$$

注记 4.5.6. 上述证明表明: 若 $\dim X = d$, 可选取 U_n , 使⁹⁰

$$\dim H^i(U_n, F) = O(d_n^{1-|i|/d}).$$

⁸⁹据勘误第 56 条修正。

⁹⁰译者注: 此处沿用前文的范围 $i < 0$ 。原式分母中的 d 要求 $d > 0$ 。若 $\dim X = 0$, 层集中在普通上同调次数 0, 故所有负次数上同调均为零, 无须使用这个含 $1/d$ 的估计。

5 自对偶度：权

本章以更具算术性的结果补充第 4 章的几何结论。除明确出现的严格 Hensel 化外，我们只考虑有限域或有限域代数闭包上的分离有限型概形，并只考虑自对偶度 $p_{1/2}$ 。⁹¹

5.0 记号

设 $p \neq \ell$ 为素数， q 为 p 的幂， $\mathbb{F}_q$ 为含 q 个元素的有限域， $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{F}_q$ 的一个代数闭包。

与 [1] (0.7) 一样，下标 0 表示定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的对象（概形或概形上的层）；删去下标表示把标量从 $\mathbb{F}_q$ 扩张到 $\mathbb{F}$ 。

5.1 [1] 中结果的回顾

5.1.1

设 X_0 是 $\mathbb{F}_q$ 上的有限型概形， F_0 是 X_0 上的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -层。在 $\mathbb{F}$ 上有 Frobenius 态射 (Frobenius morphism; 法: *morphisme de Frobenius*)

$$\mathrm{Fr}_q : X \longrightarrow X$$

(坐标取 q 次幂)，以及同构

$$F_q^* : \mathrm{Fr}_q^* F \xrightarrow{\sim} F.$$

可把 F_0 看成 X_0 上的平展空间；此时，上述同构来自水平箭头均为 Fr_q 的笛卡尔交换图

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\mathrm{Fr}_q} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\mathrm{Fr}_q} & X. \end{array}$$

对每个整数 n ，置⁹²

$$\mathrm{Fr}_{q^n} := (\mathrm{Fr}_q)^n,$$

⁹¹据勘误第 57 条修正。

⁹²译者注：原文作“每个整数”。以下涉及 $\mathbb{F}_{q^n}$ 及概形 Frobenius 的迭代，须取 $n \geq 1$ ；一般概形上的 Frobenius 并无逆态射。

并以

$$F_{q^n}^* : \mathrm{Fr}_{q^n}^* F \xrightarrow{\sim} F$$

表示由 F_q^* 迭代所得的同构。若 $X_1/\mathbb{F}_{q^n}$ 由 X_0 扩张标量得到，则

$$X_1 \otimes_{\mathbb{F}_{q^n}} \mathbb{F} = X,$$

而这些态射正是相对于 $X_1/\mathbb{F}_{q^n}$ 的 Frobenius 态射。

Fr_{q^n} 的不动点恰是定义在 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上的点 $x \in X(\mathbb{F})$ ；在每个这样的不动点处， $F_{q^n}^*$ 是 F_x 的自同构。

同样，对 $K_0 \in D_c^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ ， K 带有同构

$$F_q^* : \mathrm{Fr}_q^* K \xrightarrow{\sim} K.$$

特别地， X_0 上的歳层 F_0 扩张标量后给出 X 上的歳层 F ，并带有同构 $F_q^* : \mathrm{Fr}_q^* F \xrightarrow{\sim} F$ 。

命题 5.1.2. 函子

$$F_0 \longmapsto (F, F_q^*)$$

从 X_0 上的歳层范畴到带有同构 $\mathrm{Fr}_q^* F \xrightarrow{\sim} F$ 的 X 上歳层范畴，是全忠实的。其本质像对扩张及子商稳定。

注记. 对 $\mathbb{Z}_\ell$ -歳层，可以证明对应函子是范畴等价。对 $\mathbb{Q}_\ell$ 或 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 系数，它并非本质满；甚至当 $X_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 是一个点时，下述对象也不在本质像中：取 $F = \mathbb{Q}_\ell$ ，而

$$\sigma : \mathrm{Fr}_q^* \mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$$

为乘以 u ，其中 u 不是 ℓ -进单位。

证明. 设 $a : X_0 \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 为投影， Γ 为 $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 上的“整体截面”函子。对 $K_0, L_0 \in D_c^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ ，有

$$\mathrm{Hom}(K_0, L_0) = H^0 R\mathrm{Hom}(K_0, L_0), \quad (5.1.2.1)$$

以及

$$R\mathrm{Hom}(K_0, L_0) = R\Gamma Ra_* R\mathcal{H}om(K_0, L_0). \quad (5.1.2.2)$$

式 (5.1.2.2) 中的复合记号已按勘误修正。⁹³

对 $M_0 \in D_c^b(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ ，函子 $R\Gamma$ 给出谱序列

$$E_2^{pq} = H^p(\mathrm{Spec} \mathbb{F}_q, H^q M_0) = H^p(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q), H^q M) \implies H^{p+q} R\Gamma M_0. \quad (5.1.2.3)$$

此谱序列由取极限得到；这里的 Galois 上同调是连续上同调。

由于

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) \simeq \widehat{\mathbb{Z}},$$

且它由几何 Frobenius (*geometric Frobenius*; 法: *Frobenius géométrique*) F 拓扑生成； F 是算术 Frobenius (*arithmetic Frobenius*; 法: *Frobenius arithmétique*)

$$\varphi : x \longmapsto x^q$$

⁹³据勘误第 58 条修正。

的逆。这里采用通常的记号 $\widehat{\mathbb{Z}}$ 。⁹⁴ 因而上述 Galois 上同调群在 $p \neq 0, 1$ 时为零； $p = 0$ 时得到 F -不变量， $p = 1$ 时得到 F -余不变量。故 (5.1.2.3) 化为短正合列

$$0 \longrightarrow (H^{n-1}M)_F \longrightarrow H^n R\Gamma M_0 \longrightarrow (H^n M)^F \longrightarrow 0. \quad (5.1.2.4)$$

$H^i Ra_* R\mathcal{H}om(K_0, L_0)$ 底层的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -向量空间，正是在 X 上计算的

$$H^i R\mathcal{H}om(K, L) = \mathcal{H}om^i(K, L).$$

结合 (5.1.2.1) 与 (5.1.2.4)，得到短正合列

$$0 \longrightarrow (\mathcal{H}om^{i-1}(K, L))_F \longrightarrow \mathcal{H}om^i(K_0, L_0) \longrightarrow \mathcal{H}om^i(K, L)^F \longrightarrow 0. \quad (5.1.2.5)$$

令 $i = 0$ 。若 K_0, L_0 是崴层，则 $\mathcal{H}om^{-1}(K, L) = 0$ ，从而得到所称的全忠实性：

$$\mathcal{H}om(K_0, L_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(K, L)^F.$$

令 $i = 1$ ，仍设 K_0, L_0 为崴层。由 3.1.17(ii)， $\mathcal{H}om^1(K_0, L_0)$ （相应地， $\mathcal{H}om^1(K, L)$ ）等同于相应崴层范畴中 K_0 被 L_0 扩张（相应地， K 被 L 扩张）的群。因此有短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(K, L)_F \longrightarrow \text{Ext}^1(K_0, L_0) \longrightarrow \text{Ext}^1(K, L)^F \longrightarrow 0.$$

在带同构 $\phi: \text{Fr}_q^* F \xrightarrow{\sim} F$ 的 X 上崴层范畴中， Ext^1 也有类似的短正合列。遗忘 ϕ 给出

$$\text{Ext}^1((F, \phi_F), (G, \phi_G)) \longrightarrow \text{Ext}^1(F, G).$$

扩张 E 的类属于其像，当且仅当它被 ϕ 固定，也就是说，当且仅当可补全交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fr}_q^* G & \longrightarrow & \text{Fr}_q^* E & \longrightarrow & \text{Fr}_q^* F \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi_G & & \downarrow & & \downarrow \phi_F \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \longrightarrow 0. \end{array}$$

其核由底层扩张为 $G \oplus F$ 的对象给出；相应的结构同构形如

$$\begin{pmatrix} \phi_G & U\phi_F \\ 0 & \phi_F \end{pmatrix},$$

其类由 U 模去

$$\phi_G \text{Fr}_q^*(V) \phi_F^{-1} - V, \quad V: F \longrightarrow G,$$

确定。

本可直接比较这两个正合列。这里可免去这一核对：它们已说明

$$\dim \text{Ext}^1(F_0, G_0) = \dim \text{Ext}^1((F, \phi_F), (G, \phi_G)).$$

⁹⁴据勘误第 59 条修正。

全忠实性保证自然映射

$$\mathrm{Ext}^1(F_0, G_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1((F, \phi_F), (G, \phi_G))$$

为单射, 故它是双射, 本质像因而对扩张稳定。对子商的稳定性由下一引理推出。 $\square$

引理 5.1.3. 对 X_0 的每个子概形 Y_0 , 设 $P(Y_0)$ 是由二元组 (F, ϕ) 所成范畴的一个严格全子范畴, 并对核、余核和扩张稳定; 这里 F 是 $Y = Y_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ 上的崱层, 而

$$\phi : \mathrm{Fr}_q^* F \xrightarrow{\sim} F.$$

“严格全”这一加强依勘误采用, 并同时适用于 5.1.4。⁹⁵ 假设:

- (a) 对开浸入 $j : Y_0 \hookrightarrow Z_0$, 这些范畴在 ${}^p j_!, {}^p j_*$ (因而也在 ${}^p j_{!*}$) 及 ${}^p j^*$ 下稳定;
- (b) 对闭浸入 $i : Y_0 \hookrightarrow Z_0$, i_* 给出 $P(Y_0)$ 到 $P(Z_0)$ 中支撑在 Y_0 上的对象所成子范畴的等价;
- (c) 若 Y_0 光滑、纯维数为 d , $(F, \phi) \in P(Y_0)$ 且 $F = L[d]$, 其中 L 光滑, 则对 L 的每个光滑、 ϕ -稳定的子商 L' , 都有 $(L'[d], \phi) \in P(Y_0)$ 。⁹⁶

则每个 $P(Y_0)$ 都对子商稳定。

证明. 对 $\overline{Y}_0$ 作诺特归纳, 证明 $P(Y_0)$ 对子对象和商对象稳定。设 $B \in P(Y_0)$, $A \subset B$; 须证 $A \in P(Y_0)$ 。一旦证得, $B/A \in P(Y_0)$ 便由对余核的稳定性得到。

可设 $Y_0 \neq \emptyset$ 。此时存在非空开集 $j : U_0 \hookrightarrow Y_0$, 使 U_0 光滑、纯维数为 d , 且 $B|_{U_0}$ 与 $A|_{U_0}$ 均形如 $(L[d], \phi)$, 其中 L 光滑。由 (a)、(c),

$${}^p j_! j^* A, \quad {}^p j_* j^*(B/A)$$

均属于 $P(Y_0)$, 故

$$I = \mathrm{Im}({}^p j_! j^* A \longrightarrow A \hookrightarrow B),$$

以及

$$J = \mathrm{Ker}(B \longrightarrow {}^p j_* j^*(B/A))$$

也属于 $P(Y_0)$ 。有

$$I \subset A \subset J \subset B,$$

且 J/I 支撑在 $Z_0 = Y_0 - U_0$ 上。由 (b) 及应用于 Z_0 的归纳假设, J/I 的子对象 A/I 属于 $P(Y_0)$; 又 A 是 A/I 被 I 的扩张, 故 $A \in P(Y_0)$ 。 $\square$

注记 5.1.4. 若对 X_0 的每个子概形 Y_0 , 给定 Y_0 上崱层范畴的一个严格全子范畴 $P(Y_0)$, 且这一子范畴系满足 5.1.3 的条件, 则 $P(Y_0)$ 对子商稳定。上面的证明原样适用, 也可由 5.1.2、5.1.3 推出。

在这种形式下, 只要崱层有定义 (参见 2.2.12), 结论对任意基域及 2.2.1 意义下的任意崱度都成立, 而不只适用于 $p_{1/2}$ 。

⁹⁵ 据勘误第 61 条修正。

⁹⁶ 据勘误第 60 条修正。

5.1.5

回忆 [1] 1.2.1、1.2.2：若对每个 n 及 Fr_{q^n} 的每个不动点

$$x \in X_0(\mathbb{F}) \quad (\text{即 } x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})),$$

自同构 $F_{q^n}^*$ 在 F_x 上的特征值都是代数数，且其所有复共轭的绝对值都等于

$$(q^n)^{w/2},$$

则称 X_0 上的 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -层 F_0 是权 w ($w \in \mathbb{Z}$) 的逐点纯层 (*punctually pure sheaf*; 法: *faisceau ponctuellement pur*)。

又回忆 [1] 1.2.2：若 F_0 有一个有限滤过，其相继商均逐点纯，则称 F_0 为混合层 (*mixed sheaf*; 法: *faisceau mixte*)。这些非零相继商的权称为 F_0 的逐点权 (*punctual weights*; 法: *poids ponctuels*)。

定义混合复形范畴

$$D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

为 $D_c^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 中由满足下述条件的 K 所成的全子范畴：每个上同调层 $H^i K$ 都是混合层。

5.1.6

由 [1] 6.1，三角子范畴

$$D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \subset D_c^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

在所有通常运算下稳定：

$$Rf_*, \quad Rf_!, \quad f^*, \quad Rf^!, \quad \otimes, \quad R\mathcal{H}om,$$

Verdier 对偶，以及在适当意义下的消失圈。它也在 $\tau_{\leq i}$ 、 $\tau_{\geq i}$ 下稳定，因为混合性可在上同调层上检验。而构造任意崴度 p 的 ${}^p\tau_{\leq i}$ 、 ${}^p\tau_{\geq i}$ ，只会用到这些运算。

稳定性 5.1.7.

(i) $D_c^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 上崴度 $p_{1/2}$ 的 t -结构在 $D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 上诱导一个 t -结构。

(ii) 混合崴层的每个子商都是混合的。

断言 (i) 来自 5.1.6： D_m^b 在 ${}^p\tau_{\leq i}$ 、 ${}^p\tau_{\geq i}$ 下稳定。由此，混合崴层构成所有崴层范畴的一个全阿贝尔子范畴，并对核、余核和扩张稳定。断言 (ii) 由 5.1.4 得到，因为 5.1.6 保证 5.1.3 的假设成立。

以下只考虑混合复形；若有例外，将明确指出。

5.1.8

对 $K \in D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, 若每个 i 下 $H^i K$ 的逐点权均不超过 $w + i$, 就称 K 的权不超过 w , 并以

$$D_{\leq w}^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

表示 $D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中相应的全子范畴。注意定义中含有平移 i ; 理由见下文引用的 [1] 6.2.3。由定义有

$$(D_{\leq w}^b)[1] = D_{\leq w+1}^b,$$

特别地,

$$D_{\leq w}^b[1] \supset D_{\leq w}^b;$$

这与 t -结构公理 1.3.1(ii) 中出现的包含方向相反。

若 Verdier 对偶 DK 的权不超过 $-w$, 就称 K 的权不小于 w (*weight at least w* ; 法: *poids au moins w*), 并以

$$D_{\geq w}^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

表示相应的全子范畴。若 K 的权既不超过 w 又不小于 w , 就称 K 是权 w 的纯复形 (*pure complex of weight w* ; 法: *complexe pur de poids w*)。

若 X_0 光滑、纯维数为 d , 且 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -层 $H^i K$ 均光滑, 则

$$H^i(DK) = (H^{-2d-i}K)^\vee(d),$$

从而 K 是权 w 的纯复形, 当且仅当每个 $H^i K$ 都是权 $w + i$ 的逐点纯层。

由下文 5.1.15(iii) 可知

$$D_{\leq w}^b \cap D_{\geq w+1}^b = \{0\}.$$

只须把 5.1.15(iii) 应用于 K 的恒等态射, 并把它视为从 K 到 $K[-1]$ 的次数 1 态射。

命题 5.1.9. 设 $K \in D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 。则：

(i) K 的权不超过 w ，当且仅当对每个闭点 x_0 ，记 $i: x_0 \hookrightarrow X_0$ ，都有 i^*K 的权不超过 w ；

(ii) K 的权不小于 w ，当且仅当对每个闭点 x_0 ，都有 $i^!K$ 的权不小于 w 。

第一条显然；第二条是其对偶命题。

注记 5.1.10. 设 X_1 由 X_0 把标量从 $\mathbb{F}_q$ 扩张到 $\mathbb{F}_{q^n}$ 得到， K_1 是 K_0 在 X_1 上的逆像。则 K_1 是混合的，当且仅当 K_0 是混合的。相应地， K_1 的权不超过 w （相应地，不小于 w ），当且仅当 K_0 如此。

因此，要谈论权，只须给定二元组 (X, K) ，并能在某个充分可除的 n 下把定义域降到 $\mathbb{F}_{q^n}$ 。

注记 5.1.11. $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 上一个可构造 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -层在 $\mathbb{F}$ 上的纤维，因结构传递而带有 $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ 的作用。这给出范畴等价：

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Spec}(\mathbb{F}_q) \text{ 上的} \\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-可构造层} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{带 } \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q) \text{ 连续作用的} \\ \text{有限维 } \overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-向量空间} \end{array} \right\}.$$

Frobenius F_q^* 是几何 *Frobenius*

$$F = \varphi^{-1}$$

的作用，其中 φ 是算术 *Frobenius*

$$\varphi: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}, \quad x \longmapsto x^q.$$

我们将把权的定义推广到带 $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ 作用的向量空间。

5.1.12

可以把 5.1.10 与 5.1.11 结合起来。例如，设 (X_0, K_0) 定义在 $\mathbb{F}_q$ 上， $u: Y \rightarrow X$ 为有限型态射，则可以谈论

$$H^i(Y, u^*K)$$

的权（记号见 4.0.3）。事实上，对充分可除的 n ， u 与 Y 可定义在 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上，从而 $H^i(Y, u^*K)$ 带有 $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^n})$ 的作用。

若另取一个充分可除的 m ，则在 $\mathbb{F}_{q^{mn}}$ 上，两种定义彼此相容；所得的两个 Galois 作用在 $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^{mn}})$ 上一致。权只依赖于这一有限指数子群上的限制，故与所取的下降数据无关。

5.1.13

[1] 的主要定理 ([1] 3.3.1、6.2.3) 断言：若 $f: X_0 \rightarrow Y_0$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上有限型概形之间的分离态射，则

$$Rf_!: D_{\leq w}^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_{\leq w}^b(Y_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

显然, f^* 保持 $D_{\leq w}^b$; 并且张量积给出

$$\otimes : D_{\leq w}^b \times D_{\leq w'}^b \longrightarrow D_{\leq w+w'}^b.$$

这里的两个因子按勘误补全。⁹⁷ 再利用对偶性, 得到下列稳定性表; 其中为简洁起见, 将 $Rf_!, Rf^!$ 分别写成 $f_!, f^!$ 。

稳定性 5.1.14.

- (i) $f_!$ 与 f^* 保持 $D_{\leq w}^b$;
- (i*) $f^!$ 与 f_* 保持 $D_{\geq w}^b$;
- (ii) $\otimes$ 把 $D_{\leq w}^b \times D_{\leq w'}^b$ 映入 $D_{\leq w+w'}^b$;
- (ii*) $R\mathcal{H}om$ 把 $D_{\leq w}^b \times D_{\geq w'}^b$ 映入 $D_{\geq -w+w'}^b$;
- (iii) Verdier 对偶 D 互换 $D_{\leq w}^b$ 与 $D_{\geq -w}^b$ 。

外张量积

$$\boxtimes := \mathrm{pr}_1^* \otimes \mathrm{pr}_2^*$$

由 (i)、(ii) 把

$$D_{\leq w}^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \times D_{\leq w'}^b(Y_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

映入

$$D_{\leq w+w'}^b(X_0 \times Y_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

这里的引用依勘误改为 (i)、(ii)。⁹⁸ 利用 5.1.9, 容易验证相反方向, 从而

$$\inf\{w \mid K_0 \boxtimes L_0 \in D_{\leq w}^b\} = \inf\{w' \mid K_0 \in D_{\leq w'}^b\} + \inf\{w'' \mid L_0 \in D_{\leq w''}^b\}. \quad (5.1.14.1)$$

外张量积与对偶交换: 由 SGA 5 III 1.1.7, $X_0 \times Y_0$ 的对偶化复形是 X_0 、 Y_0 对偶化复形的外张量积, 而 SGA 5 III 2.2.4 ($R\mathcal{H}om$ 与 $\boxtimes$ 的交换) 遂给出该结论。对 (5.1.14.1) 对偶化, 得到

$$\sup\{w \mid K_0 \boxtimes L_0 \in D_{\leq w}^b\} = \sup\{w' \mid K_0 \in D_{\leq w'}^b\} + \sup\{w'' \mid L_0 \in D_{\leq w''}^b\}. \quad (5.1.14.1^*)$$

命题 5.1.15. 设 $K_0, L_0 \in D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, 并设存在整数 w , 使

$$K_0 \in D_{\leq w}^b, \quad L_0 \in D_{\geq w+1}^b.$$

则:

(i)

$$Ra_* R\mathcal{H}om(K_0, L_0) \in D_{\geq 1}^b(\mathrm{Spec} \mathbb{F}_q, \overline{\mathbb{Q}}_\ell);$$

(ii) 当 $i > 0$ 时, $\mathrm{Hom}^i(K_0, L_0) = 0$ 。

⁹⁷ 据勘误第 62 条修正。

⁹⁸ 据勘误第 63 条修正。

若只假设

$$K_0 \in D_{\leq w}^b, \quad L_0 \in D_{\geq w}^b,$$

则仍有：

(iii) 当 $i > 0$ 时，

$$\mathrm{Hom}^i(K, L)^F = 0.$$

特别地，对 $i > 0$ ，自然映射

$$\mathrm{Hom}^i(K_0, L_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}^i(K, L)$$

为零。

断言 (i) 由 5.1.14 得到。它说明 $\mathrm{Hom}^i(K, L)$ 的权不小于 $i + 1$ ，因而当 $i \geq 0$ 时权严格为正。于是

$$\mathrm{Hom}^i(K, L)_F = \mathrm{Hom}^i(K, L)^F = 0 \quad (i \geq 0).$$

对 (5.1.2.5) 应用这一点，即得 (ii)。同理可得 (iii)。

5.2 一个逆命题

定理 5.2.1. 设 F_0 是 X_0 上的混合层。则 F_0 的权不小于 w ，当且仅当对每个源概形 U_0 仿射的平展态射 $u_0 : U_0 \rightarrow X_0$ ，向量空间

$$H^0(U, F)$$

的权不小于 w (记号见 4.0.3)。

证明. 条件的必要性由 (5.1.14.1*) 得到。⁹⁹事实上，设 $u : U_0 \rightarrow X_0$ 为平展态射， $a : U_0 \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 为投影，则

$$u^! = u^*,$$

而 a_* 保持 $D_{\geq w}^b$ 。

现证充分性。该条件还蕴含：对任意源概形 U 仿射的平展态射 $u : U \rightarrow X$ ， $H^0(U, F)$ 在 5.1.12 的意义下权不小于 w 。事实上，可取充分可除的 n ，使 U 与 u 定义在 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上；记相应对象为 U_1 、 u_1 。令 V_0 为把 U_1 沿 $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q$ 作 Grothendieck 标量限制所得的 $\mathbb{F}_q$ -概形。这里的结构态射就是复合

$$U_1 \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^n}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q).$$

于是有态射

$$v_0 : V_0 \longrightarrow X_0,$$

⁹⁹译者注：原文引用 “5.1.14.1*”，这里保留。下文实际使用的是稳定性 5.1.14(i*)，而非外张量积的权公式。

而 $V_1 := V_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$ 是 U_1 的各个 $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ -共轭的不交并。特别地，带 $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_{q^n})$ 作用的

$$H^0(U, u^*F)$$

是

$$H^0(V, v^*F)$$

的一个直因子，因而权不小于 w 。 □

5.2.2 光滑连通一维 X 的证明

把 F_0 写成简单崴层的相继扩张： F_0 有一个有限递减滤过 $\mathcal{F}$ ，使每个 $\text{Gr}_{\mathcal{F}}^i F_0$ 都属于下列两类之一：

(a) 形如

$$({}^\circ j_* L_0)[1],$$

其中 L_0 是稠密开集 $j: Y_0 \hookrightarrow X_0$ 上的不可约光滑层；并且

$$({}^\circ j_* L_0)[1] = j_{!*}(L_0[1]);$$

(b) 支集为一点，且不可约。

(a)、(b) 两类层都是混合的。(a) 中的 L_0 不可约，因而是纯的（必要时可缩小开集，见 5.1.8）。由 [1] ex. 6.2.5 (c)，

$$({}^\circ j_* L_0)[1] = j_{!*}(L_0[1])$$

也是与 $L_0[1]$ 同一权的纯层。同样，(b) 中支集为一点的层不可约，故也是纯的。

滤过 $\mathcal{F}$ 给出谱序列

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(U, \text{Gr}_{\mathcal{F}}^p F) \implies H^{p+q}(U, F).$$

这里涉及的 H^i 在 $i \neq -1, 0$ 时均为零。设 r 是 $H^{-1}F$ 在一般点处的秩，也就是上述 (a) 中各光滑层 L_0 的秩之和。若 U 连通，则

$$\sum_p \dim H^{-1}(U, \text{Gr}_{\mathcal{F}}^p F) \leq r.$$

因此，对任意仿射连通且平展于 X_0 的 U ，每个 $H^0(U, \text{Gr}_{\mathcal{F}}^p F)$ 都有一个自然商：其核的维数不超过 r ，而该商是 $H^0(U, F)$ 的子商，故权不小于 w 。

若 $\text{Gr}_{\mathcal{F}}^p F_0$ 的支集是闭点 x_0 ，可取 U ，使对 x_0 上方的 $x \in X$ 有

$$|u^{-1}(x)| > r.$$

此时 $H^0(U, \text{Gr}_{\mathcal{F}}^p F)$ 含有 $|u^{-1}(x)|$ 份 $(\text{Gr}_{\mathcal{F}}^p F)_x$ 的直和。由于 $|u^{-1}(x)| > r$ ，其中至少一份单射到上述权不小于 w 的商中，故 $\text{Gr}_{\mathcal{F}}^p F$ 本身的权不小于 w 。

设 $\overline{X}_0$ 是以 X_0 为稠密开集的光滑连通射影曲线；同样，对平展态射 $u: U \rightarrow X$ ，设 U 仿射连通， $\overline{U}$ 是 U 的光滑射影完备化。为研究 (a) 型的 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}}^p F_0$ ，取 U 使其映入 $Y \subset X$ 。记 $k: U \hookrightarrow \overline{U}$ 为包含映射，则有单射

$$H^1(\overline{U}, {}^\circ k_* u^* L) \hookrightarrow H^1(U, u^* L).$$

而

$$H^1(\overline{U}, {}^\circ k_* u^* L) = H^0(\overline{U}, k_{1*} u^* L[1]),$$

所以它也有一个权不小于 w 的商，且该商的核维数不超过 r 。另一方面，由 [1] 3.2.3，这个 H^0 是纯的，其权等于 $L_0[1]$ 的权。适当选择 U ，它的维数便大于 r ；例如可令 $\overline{U}$ 的亏格为 g ，且 $2g - 2 > r$ ，再应用 4.5.1 所引的 Euler–Poincaré 公式。由此可知 $L_0[1]$ 的权不小于 w 。这就完成了光滑连通一维 X 情形的证明。

注记 5.2.3. 由 F 过渡到 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}}^p F$ 的论证可以形式化如下。令 S 为所有态射

$$u: U \rightarrow X$$

组成的范畴，其中 U 仿射连通， u 为平展态射。对 X 上每个层 F ，令 $\{F\}$ 为 S 上的预层

$$U \mapsto H^0(U, F).$$

再令 N 为 S 上满足 $\dim h(U)$ 一致有界的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -向量空间预层 h 所成的范畴。它是 S 上 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -向量空间预层范畴 $\mathrm{pf}(S)$ 的厚子范畴。依此记号，当 X 光滑且维数不超过 1 时，函子

$$F \mapsto \{F\} \pmod{N}$$

是正合函子

$$(X \text{ 上的层}) \rightarrow \mathrm{pf}(S)/N.$$

注记 5.2.4. 5.2.2 的证明方法还给出如下结论。设 F_0 是 X_0 上的混合层，并设 X 是光滑连通的一维概形。假设对每个平展态射 $u: U \rightarrow X$ ，只要 U 仿射连通， $H^0(U, F)$ 中权小于 w 的子空间¹⁰⁰

$$W_{w-1} H^0(U, F)$$

的维数都是¹⁰¹

$$o(\deg(U \rightarrow X)).$$

则 F_0 的权不小于 w 。事实上，在 5.2.2 证明的末尾，可取如下形式的 U ：先取 U_1 ，使 $\overline{U}_1$ 的亏格大于 1；再令 U 为 U_1 的一个覆盖，并要求它可延拓为 $\overline{U}_1$ 的平展覆盖。

¹⁰⁰ 据勘误第 64 条修正。

¹⁰¹ 据勘误第 65 条修正。

5.2.5

“对每个平展态射 $U_0 \rightarrow X_0$ ，只要 U_0 仿射， $H^0(U, F)$ 的权就不小于 w ”这一假设具有如下传递性。若 $V_0 \rightarrow X_0$ 为平展态射，则该假设由 X_0 传给 V_0 ；若 F'_0 是 F_0 的商，则由 F_0 传给 F'_0 ，因为函子 $H^0(U, \cdot)$ 右正合 (4.1.1)。若 $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$ 是仿射态射，则该假设还由 (X_0, F_0) 传给¹⁰²

$$(Y_0, {}^p\varphi_*F_0), \quad {}^p\varphi_*F_0 = {}^pH^0(\varphi_*F_0).$$

事实上，对任意仿射且平展于 Y_0 的 V_0 ，令

$$U_0 = X_0 \times_{Y_0} V_0,$$

便有 (对 $U_0 \rightarrow V_0 \rightarrow \text{point}$ 应用 4.1.2 后的注记)

$$H^0(V, {}^p\varphi_*F_0) = H^0(U, F_0).$$

至于 “ F_0 的权不小于 w ” 这一结论，只须局部验证；这里的局部性是对平展拓扑而言的，而下文使用 Zariski 拓扑已经足够。此外，若 $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$ 是有限态射（其实闭浸入已经足够），则该结论对 (X_0, F_0) 成立，当且仅当它对 (Y_0, φ_*F_0) 成立。

由此不难推出，只须对仿射空间 $X_0 = \mathbb{A}_0^n$ 证明 5.2.1。以下对 n 作归纳。 $n = 0$ 时显然， $n = 1$ 的情形已在 5.2.2 中证明。

5.2.6

先证明：若 G_0 是 F_0 的一个支集为一点的崴子层，则 G_0 的权不小于 w 。扩张标量域后，不妨设 G_0 的支集就是 $\{0\}$ 。取覆盖 0 的平展态射

$$u: U \longrightarrow \mathbb{A}^1,$$

其中 U 光滑连通，并有亏格大于 1 的光滑射影完备化 $\bar{U}$ 。令 $(\bar{U}_\alpha)$ 为 $\bar{U}$ 的一族连通平展覆盖，其次数 d_α 趋于无穷；再令 U_α 为 U 在 $\bar{U}_\alpha$ 中的逆像。我们于是有

$$U_\alpha^n \longrightarrow \mathbb{A}^n,$$

而由 4.5.4,

$$\dim H^{-1}(U_\alpha^n, F/G) \leq O(d_\alpha^{n-1}).$$

另一方面， $H^0(U_\alpha^n, G)$ 是 G 在 0 处纤维的

$$(|u^{-1}(0)|d_\alpha)^n$$

份直和。正合列

$$H^{-1}(U_\alpha^n, F/G) \longrightarrow H^0(U_\alpha^n, G) \longrightarrow H^0(U_\alpha^n, F)$$

说明：当 d_α 充分大时，这些纤维中至少有一份单射到 $H^0(U_\alpha^n, F)$ 。结论随即得到。

¹⁰²据勘误第 66 条修正。

5.2.7

现证明：若 F 不含非零的、支集为一点的层，则 F_0 的权不小于 w 。取 $\mathbb{A}^n$ 中的闭点 x ，记

$$i_x : x \hookrightarrow \mathbb{A}^n.$$

由 5.1.9，只须证明 $i_x^! F$ 的权不小于 w 。取经过 x 的超平面 H 。若 H 足够一般，它不包含 F 的任何简单层的支集（这种子层的同构类只有有限多个）。记 $u : H \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ 为包含映射，则 ${}^p H^0 u^! F = 0$ 。由于 H 是除子，4.1.11 (ii) 给出

$${}^p H^i u^! F = 0 \quad (i \neq 0, 1).$$

所以此处实际上有

$${}^p H^i u^! F = 0 \quad (i \neq 1),$$

也就是说， $u^! F[1]$ 是层。

作变量变换（必要时把 $\mathbb{F}_q$ 换成有限扩张）后，可设

$$H = \mathbb{A}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{A}^n.$$

记 pr 为到最后一个因子的投影：¹⁰³

$$\begin{array}{ccccc} x & \hookrightarrow & H_0 & \xhookrightarrow{u} & \mathbb{A}_0^n \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ & & \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{A}_0^1. \end{array}$$

若 $i_{x,H} : x \hookrightarrow H$ ，则

$$i_x^! = i_{x,H}^! u^!.$$

因此只须证明 $u^! F_0$ 的权不小于 w 。对 $H_0 = \mathbb{A}_0^{n-1}$ 上的层¹⁰⁴ $u^! F_0[1]$ 应用归纳假设，问题归结为证明：对每个仿射且平展于 $\mathbb{A}_0^{n-1}$ 的 V_0 ，

$$H^1(V, u^! F)$$

的权不小于 $w + 1$ 。

令 $U_0 = V_0 \times \mathbb{A}_0^1$ ，并考虑笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xhookrightarrow{v} & U_0 \\ p \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \{0\} & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{A}_0^1. \end{array}$$

¹⁰³据勘误第 67 条修正。

¹⁰⁴据勘误第 68 条修正。

仍以 F_0 表示原来 F_0 在 U_0 上的逆像。于是 $v^!F_0$ 是 $u^!F_0$ 在 V_0 上的逆像， $v^!F[1]$ 是崴层；我们须证 $H^1(V, v^!F)$ 的权不小于 $w + 1$ 。

由基变换有

$$i^! \text{pr}_* = p_* v^!.$$

将它改写为

$$i^![1] \circ \text{pr}_* = p_* \circ v^![1].$$

此处各函子均右 t -正合 (4.1.11 (ii)、4.1.1)；取 ${}^p H^0$ (1.3.17 (iii))¹⁰⁵，得到

$$H^0(V, v^!F[1]) = H^0(i^!(p_* \text{pr}_* F)[1]). \quad (5.2.7.1)$$

由 5.2.5, $\mathbb{A}_0^1$ 上的 ${}^p \text{pr}_* F_0$ 仍满足定理的假设；再由 5.2.2, 它的权不小于 w 。因此 (5.2.7.1) 右端的权不小于 $w + 1$, $H^1(V, v^!F)$ 亦然。

5.2.8 5.2.1 的证明结束

令 G 为 F 中支集维数为 0 的最大崴子层。它在 F_q^* 下稳定，因而来自 F_0 的一个崴子层 G_0 。由 5.2.7 与 5.2.5, F_0/G_0 的权不小于 w ；由 5.2.6, G_0 的权不小于 w 。所以 F_0 作为 F_0/G_0 被 G_0 扩张所得的崴层，权不小于 w 。

5.3 权滤过

命题 5.3.1. 若 X_0 上的崴层 F_0 是权不小于 w (相应地，权不超过 w) 的混合崴层，则 F_0 的每个子商仍是权不小于 w (相应地，权不超过 w) 的混合崴层。

作扭曲后，可归约到 $w = 0$ 。¹⁰⁶ 设 F_0 的权不小于 0。若 G_0 是 F_0 的商，则对每个仿射且平展于 X_0 的 U_0 , $H^0(U, G)$ 是 $H^0(U, F)$ 的商，因而权不小于 0；应用 5.2.1 即得结论。

若 G_0 是 F_0 的崴子层，则正合列

$$H^{-1}(U, F/G) \longrightarrow H^0(U, G) \longrightarrow H^0(U, F)$$

同样说明 G_0 的权不小于 -1 。在 $X_0 \times X_0$ 上可改进这一估计： $G_0 \boxtimes G_0$ 是 $F_0 \boxtimes F_0$ 的子层，故其权不小于 -1 ；由 (5.1.14.1*)， G_0 的权不小于 $-\frac{1}{2}$ 。权为整数，故 G_0 实际上权不小于 0。

相应的另一组断言由对偶性得到。

推论 5.3.2. 设 $j: U_0 \hookrightarrow X_0$ 为仿射浸入。若 F_0 是 U_0 上权不超过 w (相应地，权不小于 w) 的混合崴层，则崴层 $j_{!*}F_0$ 仍是权不超过 w (相应地，权不小于 w) 的混合崴层。特别地，若 F_0 是纯的，则 $j_{!*}F_0$ 是同一权的纯层。

¹⁰⁵ 据勘误第 69 条修正。

¹⁰⁶ 译者注：这里的扭曲可取为张量乘以从 $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 拉回的权 $-w$ 的一维层。选取 $q^{1/2} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ，令几何 Frobenius 在该层上作用为 $q^{-w/2}$ 即可。原文只说 “torsion”，并不限于改变偶数权的整数次 Tate 扭曲 (Tate twist; 法: torsion de Tate)。

第一种证明。先设 F_0 的权不超过 w 。由于 j 仿射， $j_!F_0$ 是崴层 (4.1.3)，并且权不超过 w (5.1.14 (i))。崴层 $j_{!*}F_0$ 是 $j_!F_0$ 的商，故由 5.3.1，它的权不超过 w 。再加上对偶命题，便得 5.3.2。

第二种证明。下面给出另一种证明，它还适用于不必仿射的浸入。只须证明：若 F_0 的权不小于 w ，则 $j_{!*}F_0$ 亦然；并且只须处理开浸入。

a) $X_0 \setminus U_0$ 为有限集。取平展态射 $v: V_0 \rightarrow X_0$ ，并考虑笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} v^{-1}(U_0) & \xhookrightarrow{j'} & V_0 \\ v' \downarrow & & \downarrow v \\ U_0 & \xhookrightarrow{j} & X_0. \end{array}$$

有

$$v^*j_{!*}F_0 = j'_{!*}v'^*F_0 = {}^\circ\tau_{\leq -1}j'_{!*}v'^*F_0,$$

译者注：原文此处使用普通截断 ${}^\circ\tau$ 。所写等式一般不能在整个 V_0 上成立。例如，若 F_0 支撑在 U_0 的一个闭点上，则普通截断会将它消去。等式可在避开 $H^0(v'^*F_0)$ 支撑的边界邻域使用。证明实际只需下一单射；由中间扩张的刻画， $j'_{!*}v'^*F_0 \rightarrow j'_{!*}v'^*F_0$ 的余锥支撑在有限边界上，且普通上同调集中于非负次数，因此该单射仍成立。

因而

$$H^0(V, v^*j_{!*}F) \hookrightarrow H^0(V, j'_{!*}v'^*F) = H^0(v^{-1}(U), v'^*F).$$

末一群的权不小于 w (5.1.14 (i*))，故由 5.2.1 的逆命题， $j_{!*}F_0$ 的权不小于 w 。

b) 归约到 a) (略述)。问题是局部的，故不妨设 X_0 仿射。对 $\dim X_0$ 作归纳。对任意投影

$$f: X_0 \longrightarrow \mathbb{A}_0^1,$$

存在非空开集 $V_0 \subset \mathbb{A}_0^1$ ，使每个闭点 $v_0 \in V_0$ 都给出笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(v_0) \cap U_0 & \xhookrightarrow{i} & U_0 \\ j' \downarrow & & \downarrow j \\ f^{-1}(v_0) & \xhookrightarrow{i} & X_0, \end{array}$$

其中 $i^*F_0[-1]$ 是崴层，并且

$$i^*(j_{!*}F_0)[-1] = j'_{!*}(i^*F_0[-1]).$$

对于取自适当缩小后 V_0 的闭点 v_0 ，¹⁰⁷还有

$$i^*(j_{!*}F_0)[-2](-1) \xrightarrow{\sim} i^!(j_{!*}F_0).$$

把归纳假设应用于

$$f^{-1}(v_0) \cap U_0 \hookrightarrow f^{-1}(v_0)$$

¹⁰⁷据勘误第 70 条修正。

与 $i^*F_0[-1]$, 可知 $j_{!*}F_0$ 在 $f^{-1}(v_0)$ 上的权不小于 w 。这对每个 f 都成立, 故 $j_{!*}F_0$ 在 X_0 的某个固定子集 Y_0 之外权不小于 w ; 于是归约到 a)。¹⁰⁸

注记 5.3.3. 对任意拟有限态射 f , 函子 f_* 把权不小于 w (相应地, 权不超过 w) 的崴层变为权不小于 w (相应地, 权不超过 w) 的崴层, 并把纯层变为同一权的纯层。把 f 分解为有限态射与开浸入的复合, 即可由 5.3.2 的第二种证明推出此结论。另一个与 5.3.2 第一种证明平行的证明见 5.4.3。

推论 5.3.4. 每个简单混合崴层 F_0 都是纯的。

存在光滑连通、维数为 d 的局部闭子概形 $j: U_0 \hookrightarrow X_0$, 以及 U_0 上的光滑层 L_0 , 使

$$F_0 = j_{!*}(L_0[d])$$

(4.3.1)。可以缩小 U_0 (4.3.2)。由于光滑层 L_0 不可约, 由定义可取它为纯层 (这里等价于逐点纯 (5.1.8)) ¹⁰⁹。还可取 U_0 仿射, 此时只须应用 5.3.2。

定理 5.3.5. 每个混合崴层都有唯一的有限递增滤过 W , 称为权滤过, 使

$$\mathrm{Gr}_i^W F_0$$

是权 i 的纯层。每个态射 $f: F_0 \rightarrow G_0$ 都与 F_0, G_0 的权滤过严格相容。

设混合的简单崴层 U_0, V_0 的权分别为 u, v , 且 $u > v$ 。由 5.1.15 (ii) (取 $i = 1$; 回忆 $\mathrm{Ext}^1 = \mathrm{Hom}_D^1$),

$$\mathrm{Ext}^1(V_0, U_0) = 0.$$

令 S^+ (相应地, S^-) 为权大于 i (相应地, 不超过 i) 的混合简单崴层的同构类集合。对 S^+, S^- 应用下述引理, 便得到 F_0 的子层 $W_i F_0$ 。再结合 5.3.1, 即得唯一性与严格函子性。

引理 5.3.6. 设 A 是每个对象都具有有限长度的阿贝尔范畴。把 A 的简单对象同构类集合分拆成两类 (S^+, S^-) , 并令 A^+ (相应地, A^-) 为 A 的全子范畴, 其对象的所有简单子商均属于 S^+ (相应地, S^-)。假设对 $U \in S^+, V \in S^-$ 都有

$$\mathrm{Ext}^1(V, U) = 0.$$

则 A 的每个对象 F 都有唯一子对象 $WF \in A^-$, 使 $F/WF \in A^+$ 。对每个态射 $f: F \rightarrow G$, 都有

$$f(WF) = f(F) \cap WG.$$

若 $X \in A^+, Y \in A^-$, 则 Ext 正合列说明

$$\mathrm{Ext}^1(Y, X) = 0.$$

¹⁰⁸译者注: 原文作 “partie fixée”, 但归约到 a) 还需说明可取 Y_0 有限。将仿射 X_0 嵌入某个 $\mathbb{A}_0^N$, 对各坐标投影应用上述论证。每个坐标只有有限多个例外值, 所有例外集的交包含于这些有限集的笛卡尔积, 因而有限。

¹⁰⁹据勘误第 71 条修正。

由于 S^+ 与 S^- 不交，还有

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}(Y, X) = 0.$$

对 F 的长度 ℓ 作归纳，以证明 WF 的存在性。若 $\ell = 0$ ，则 $F = 0$ ，结论显然。设 $\ell > 0$ ，取 F 的一个简单子对象 S 。归纳假设适用于 F/S ，故 $W(F/S)$ 已经存在。令 E 为它在 F 中的逆像；于是 E 是 $W(F/S)$ 被 S 扩张所得的对象。若 $S \in S^-$ ，取 $WF = E$ 。若 $S \in S^+$ ，则

$$\mathrm{Ext}^1(W(F/S), S) = 0$$

说明该扩张分裂；取 $W(F/S)$ 在 E 中的一个提升作为 WF 。

再证唯一性。设 F 的子对象 W', W'' 都属于 A^- ，而 $F/W', F/W''$ 都属于 A^+ 。由

$$\mathrm{Hom}(W', F/W'') = \mathrm{Hom}(W'', F/W') = 0,$$

复合态射

$$W' \longrightarrow F \longrightarrow F/W'', \quad W'' \longrightarrow F \longrightarrow F/W'$$

都为零，故 $W' = W''$ 。

最后，对任意态射 $f: F \rightarrow G$ ， $f(WF)$ 与 $f(F) \cap WG$ 都满足 $W(fF)$ 的刻画性质。因此

$$W(fF) = f(WF) = f(F) \cap WG.$$

推论 5.3.7. 设 F_0 是 X_0 上的混合层。则 F_0 的权不超过 w ，当且仅当 X_0 的每个不可约子簇 Y_0 （记其维数为 d ）都含有稠密开集 U_0 ，使

$$H^{-d}(F_0)|_{U_0}$$

的逐点权不超过 $w - d$ 。

必要性显然。现证充分性。若 F_0 的权不超过 w 不成立，则由 5.3.5，它有一个权 $w_1 > w$ 的简单商 G_0 。存在光滑连通、维数为 d 的 $j: Y_0 \hookrightarrow X_0$ ，以及 Y_0 上的光滑层 L_0 ，使

$$G_0 \simeq j_{!*}(L_0[d]).$$

可以取 Y_0 仿射，并取 L_0 为逐点纯且权为 $w_1 - d$ 的层。由短正合列

$$0 \longrightarrow \ker(F_0 \rightarrow G_0) \longrightarrow F_0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow 0$$

所诱导的长上同调列，可在 Y_0 的某个稠密开集 V_0 上得到满射

$$H^{-d}(F_0)|_{V_0} \twoheadrightarrow H^{-d}(G_0)|_{V_0} = L_0|_{V_0}.$$

由假设，充分缩小 V_0 后， $H^{-d}(F_0)|_{V_0}$ 的逐点权不超过 $w - d$ ；故 L_0 亦然，从而 $w_1 \leq w$ ，矛盾。

定理 5.3.8. 若 F_0 是 X_0 上的纯层，则 X 上的层 F 是简单层的直和；这些简单层因而形如

$$j_{!*}L[d],$$

其中 $j: U \hookrightarrow X$, U 光滑连通、纯维数为 d , 而 L 是 U 上不可约的光滑 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -层。

照录 [1] 3.4.1 (iii) 的证明。令 F' 为 F 中所有简单崴子层之和。它是 F 的最大半单子对象；只须证明 $F' = F$ 。子层 F' 在 Frobenius 下稳定，故由 5.1.2 来自 F_0 的子层 $F'_0 \subset F_0$ 。令

$$F''_0 = F_0/F'_0.$$

短正合列

$$0 \longrightarrow F'_0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F''_0 \longrightarrow 0$$

的扩张类在

$$\mathrm{Ext}^1(F'', F')$$

中的像为零：这是 5.1.15 (iii) 的结论，因为由 5.3.1, F'_0 与 F''_0 都是同一权的纯层。因此

$$F \simeq F' \oplus F''.$$

若 $F'' \neq 0$, 它便含有简单子对象；该子对象可提升到 F 中，与 F' 的最大性矛盾。故 $F'' = 0$, 从而 $F' = F$ 。

令 E_n 为 $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ 上的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -层，其纤维为以 $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ 为基的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^n$, Frobenius F 以单个 Jordan 块 (*Jordan block*; 法: *bloc de Jordan*) 作么幂作用：

$$Fe_n = e_n, \quad Fe_i = e_i + e_{i+1} \quad (i < n).$$

这是权 0 的纯且不可分解 (*indecomposable*; 法: *indécomposable*) 的层；当 $n > 1$ 时，它并不半单。仍以 E_n 表示它在 X_0 上的逆像。

命题 5.3.9.

(i) 纯且不可分解的崴层恰为

$$S_0 \otimes E_n$$

的形式，其中 S_0 为简单崴层。

(ii) 若 S_0 简单，则存在整数 d , 以及

$$X_1 := X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^d}$$

上的崴层 S_1 , 使 S_0 是 S_1 经投影 $\pi: X_1 \rightarrow X_0$ 的直像； S_1 在 X 上仍然简单，并且不同构于它在 $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q)$ 下的各个共轭。

设 F_0 是一个崴层，且 F 半单；纯的 F_0 (5.3.8) 以及简单的 F_0 都满足这一条件。令 A 为 F 的简单组成因子的同构类集合，把 F 写成其同型分量 (*isotypic components*; 法: *constituants isotypiques*) 之和：

$$F = \bigoplus_{a \in A} F_a.$$

A 在 F_q^* 下的轨道分解给出 F 的 F_q^* -稳定分解，因而由 5.1.2 给出

$$F_0 = \bigoplus_C F_{0C},$$

其中 C 遍历 F_q^* 在 A 中的轨道。

设 C 是含 d 个元素的轨道, $a \in C$ 。由于

$$F_a \subset F_C \subset F$$

在

$$F_{q^d}^* = (F_q^*)^d$$

下稳定, 它定义了 $X_1 = X_0 \otimes \mathbb{F}_{q^d}$ 上的崴子层 F_{1a} ; 这是把 F_{0C} 逆像到 X_1 后所得的子层。若 $\pi: X_1 \rightarrow X_0$ 为投影, 则

$$F_{0C} \simeq \pi_* F_{1a}.$$

取同构类为 a 的简单崴层 G_a , 并选定同构

$$\varphi: \mathrm{Fr}_{q^d}^* G_a \xrightarrow{\sim} G_a.$$

由此在

$$V_a := \mathrm{Hom}(G_a, F_a) = \mathrm{Hom}(G_a, F)$$

上得到 Frobenius $F_{q^d}^*$ 的作用, 并且同构

$$F_a \simeq G_a \otimes V_a$$

是 $F_{q^d}^*$ -等变的。

若 F_0 不可分解, 则只有一个轨道, 而且 $(V_a, F_{q^d}^*)$ 不可分解; 也就是说, $F_{q^d}^*$ 在 V_a 上只有一个 Jordan 块。改变同构 φ 后, 可设 $F_{q^d}^*$ 在 V_a 上为幺幂作用。此时 (G_a, φ) 同构于 $(F_a, F_{q^d}^*)$ 的一个子对象, 因而对应于 X_1 上的崴层 G_1 , 并且

$$F_{1a} \simeq G_1 \otimes E_{\dim V_a}.$$

这里用到: E_n 在 $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^d})$ 上的逆像, 同构于该点上以同样方式定义的层。于是

$$F_0 \simeq \pi_*(G_1 \otimes E_n) \simeq \pi_* G_1 \otimes E_n,$$

且 $\pi_* G_1$ 简单。这证明了 (i)。

若 F_0 简单, 则同样只有一个轨道, 而 $F_{q^d}^*$ 在 V_a 上的作用不可约。因此 $\dim V_a = 1$, 从而得到 (ii)。

注记 5.3.10. 截至并包括 5.3.8, 以上结果及其证明对 $\mathbb{Q}_\ell$ -上同调 (或 E_λ -上同调) 同样成立。5.3.9 (i) 在这些系数下仍然成立, 但由 5.3.8 与 5.1.2 推导它所需的线性代数更为复杂; 5.3.9 (ii) 则不再原样成立。

推论 5.3.11. 设 $\mathcal{F}_0$ 是 X_0 上的纯崴层, $j: U_0 \hookrightarrow X_0$ 为开浸入, $i: Z_0 \hookrightarrow X_0$ 为其闭补集。则 $\mathcal{F}_0$ 有唯一分解

$$\mathcal{F}_0 = j_{!*} \mathcal{F}'_0 \oplus i_* \mathcal{F}''_0.$$

而且:

(i) 伴随态射

$${}^p j_! j^* \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_0$$

经过 ${}^p j_! j^* \mathcal{F}_0$ 的商 $j_{!*} j^* \mathcal{F}_0$ 分解; 伴随态射

$$\mathcal{F}_0 \longrightarrow {}^p j_* j^* \mathcal{F}_0$$

经过 ${}^p j_* j^* \mathcal{F}_0$ 的子对象 $j_{!*} j^* \mathcal{F}_0$ 分解。

(ii) 两个伴随态射的复合

$$i_* {}^p i^! \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow i_* {}^p i^* \mathcal{F}_0$$

是同构。

唯一性来自

$$\mathrm{Hom}(j_{!*} \mathcal{F}'_0, i_* \mathcal{F}''_0) = \mathrm{Hom}(i_* \mathcal{F}''_0, j_{!*} \mathcal{F}'_0) = 0.$$

由 5.1.2, 要验证 (i)、(ii), 并验证其中诸箭头确为上述分解的嵌入与投影, 只须在 X 上验证。由 5.3.8, 又只须对 F 的简单组成因子 G 验证。每个 G 都形如 $j_{!*} G'$ 或 $i_* G''$, 断言于是显然。

5.4 纯复形

设 $X_0/\mathbb{F}_q$ 如 5.1, 且

$$K_0 \in D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

定理 5.4.1. K_0 的权不超过 w (相应地, 权不小于 w), 当且仅当每个歲上同调层

$${}^p H^i K_0$$

的权不超过 $w + i$ (相应地, 权不小于 $w + i$)。

括号内的断言由非括号内的断言对偶得到, 故只证非括号内的情形。

若 (A_0, B_0, C_0) 是好三角, 且 A_0, C_0 的权不超过 w , 则 B_0 亦然。因此条件的充分性来自诸三角

$$({}^p \tau_{\leq i-1} K_0, {}^p \tau_{\leq i} K_0, {}^p H^i K_0[-i]).$$

现设 K_0 的权不超过 w 。对 i 作降归纳, 证明 ${}^p H^i K_0$ 的权不超过 $w + i$ 。当 i 充分大时, ${}^p H^i K_0 = 0$, 断言显然。设对所有 $i > n$ 结论已成立, 于是截断

$${}^p \tau_{>n} K_0$$

的权不超过 w ; ¹¹⁰须证 ${}^p H^n K_0$ 的权不超过 $w + n$ 。

为简化记号, 设 $w = n = 0$; 作扭曲与平移即可归约到此情形。这里的扭曲如 5.3.1 的译者注所述。好三角

$$({}^p \tau_{\leq 0} K_0, K_0, {}^p \tau_{>0} K_0)$$

¹¹⁰据勘误第 72 条修正。

说明 ${}^p\tau_{\leq 0}K_0$ 的权不超过 0。三角

$$({}^p\tau_{< 0}K_0, {}^p\tau_{\leq 0}K_0, {}^pH^0K_0)$$

给出正合列

$$H^{-d}({}^p\tau_{\leq 0}K_0) \longrightarrow H^{-d}({}^pH^0K_0) \longrightarrow H^{-d+1}({}^p\tau_{< 0}K_0). \quad (5.4.1.1)$$

对 X_0 中任一维数为 d 的不可约子簇 Y_0 ，存在稠密开集 $U_0 \subset Y_0$ ，使 $H^{-d+1}({}^p\tau_{< 0}K_0)$ 在 U_0 上的限制为零。由 (5.4.1.1)， $H^{-d}({}^pH^0K_0)$ 在 U_0 上的逐点权不超过 $-d$ 。再由 5.3.7， ${}^pH^0K_0$ 的权不超过 0，证明完毕。

推论 5.4.2. 设 $f: X_0 \rightarrow Y_0$ 为有限型态射。函子

$${}^pH^0f_!, \quad {}^pH^0f^*$$

把权不超过 w 的层变为权不超过 w 的层；相应地，函子

$${}^pH^0f_*, \quad {}^pH^0f^!$$

把权不小于 w 的层变为权不小于 w 的层。

这是 5.4.1 与 5.1.14 的直接推论。

推论 5.4.3. 若 f 拟有限，则

$$f_{!*} := \text{Im}({}^p f_! \longrightarrow {}^p f_*)$$

把 X_0 上权不小于 w （相应地，权不超过 w ）的层变为 Y_0 上权不小于 w （相应地，权不超过 w ）的层；特别地，它把纯层变为同一权的纯层。

由 5.4.2，5.3.2 的第一种证明可以原样应用。

推论 5.4.4. $K_0 \in D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是权 w 的纯复形，当且仅当每个层 ${}^pH^iK_0$ 都是权 $w+i$ 的纯层。

定理 5.4.5. 若 $K_0 \in D_m^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是纯的，则在 X 上有

$$K \simeq \bigoplus_i {}^pH^iK[-i].$$

由 5.4.4 与 5.1.15 (iii)，好三角

$$({}^p\tau_{< i}K_0, {}^p\tau_{\leq i}K_0, {}^pH^iK_0[-i])$$

中次数为 1 的箭头，在

$$\text{Ext}^1({}^pH^iK[-i], {}^p\tau_{< i}K)$$

中的像为零。因此

$${}^p\tau_{\leq i}K \simeq {}^p\tau_{< i}K \oplus {}^pH^iK[-i],$$

定理随即得到。

结合 5.4.4、5.4.5 与 5.3.8¹¹¹，得到：

推论 5.4.6. 若 K_0 是纯的，则在 X 上， K 是下列对象的直和：

$$(j_{!*}L[d])[n],$$

其中 $j: U \hookrightarrow X$ ， U 光滑连通、维数为 d ， L 是 U 上不可约的光滑层， $n \in \mathbb{Z}$ 。

以下两个推论分别推广整体不变圈定理与局部不变圈定理。

推论 5.4.7. 在 X 的每个不可约分支中，选取位于一般点 η 上的几何一般点 $\bar{\eta}$ 。若 K_0 是纯的，则对每个 i 都有满射

$$H^i(X, K) \twoheadrightarrow \prod_{\eta} (H^i K)_{\bar{\eta}}^{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}. \quad (5.4.7.1)$$

这里左端的 H^i 是超上同调群，右端的 H^i 是通常的上同调层。

由 5.4.6，只须对

$$K = (j_{!*}L[d])[n]$$

验证 (5.4.7.1)。至多有一个 η 落在 U 中。若没有这样的 η ，或 $i \neq -d - n$ ，则右端为零。若 $\eta \in U$ 且 $i = -d - n$ ，则

$$H^i((j_{!*}L[d])[n]) = {}^\circ j_* L,$$

且 $j < i$ 时 $H^j = 0$ ，所以 5.4.7 归结为

$$H^0(X, {}^\circ j_* L) \twoheadrightarrow (L_{\bar{\eta}})^{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}.$$

左端等同于 $H^0(U, L)$ ，而此箭头实际上是同构。

推论 5.4.8. 设 x 是 X 的几何点（它位于一个不必闭的点上），¹¹² 令 X_x 为 X 在 x 处的严格 Hensel 化。对 X_x 的每个不可约分支，选取位于一般点 η 上的几何一般点 $\bar{\eta}$ 。若 K_0 是纯的，则对每个 i ，就通常上同调层而言，都有满射

$$H^i(X_x, K) = (H^i K)_x \twoheadrightarrow \prod_{\eta} (H^i K)_{\bar{\eta}}^{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}.$$

与 5.4.7 同样，可归约到 $K = (j_{!*}L[d])[n]$ 。¹¹³ 记 U_x 为 U 在 X_x 中的逆像，只须对 U_x 的每个连通分支 U'_x 及其一般点 η 验证

$$H^0(U'_x, L) \twoheadrightarrow (L_{\bar{\eta}})^{\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)}.$$

这个箭头是同构。

注记 5.4.9. 设 $f: Y_0 \rightarrow X_0$ 为真态射，且 $L_0 \in D_c^b(Y_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 。若 L_0 是纯的，则 $f_* L_0$ 也是纯的。对 $f_* L_0$ 应用 5.4.7 与 5.4.8，可得：

¹¹¹ 据勘误第 73 条修正。

¹¹² 据勘误第 74 条修正。

¹¹³ 据勘误第 75 条修正。

- (a) 若 x 是 X 的开集 U 中的几何点, 且诸 $H^i f_* L_0$ 在 U 上光滑, 则 $H^*(Y, L)$ 映满 $H^*(Y_x, L)$ 中由单值作用固定的部分, 也就是在 $\pi_1(U, x)$ 作用下不变的部分;
- (b) 若 $x \in X$, 而 $\bar{x}$ 是严格局部化 $X_{(x)}$ 的一个几何一般点, 则 $H^*(Y_x, L)$ 映满 $H^*(Y_{\bar{x}}, L)$ 中由局部单值作用固定的部分。

5.4.10

设 $f: X_0 \rightarrow Y_0$ 为射影态射, $\ell \in H^2(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(1))$ 是一个相对丰沛可逆层 (*relatively ample invertible sheaf*; 法: *faisceau inversible relativement ample*) 的第一 Chern 类 (*first Chern class*; 法: *première classe de Chern*)。对任意

$$K_0 \in D_c^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

ℓ 定义态射

$$K_0 \longrightarrow K_0[2](1),$$

并由迭代得到

$$\ell^n : K_0 \longrightarrow K_0[2n](n).$$

施以 f_* , 可得

$$\ell^n : f_* K_0 \longrightarrow f_* K_0[2n](n),$$

以及态射

$$\ell^n : {}^p H^i f_* K_0 \longrightarrow {}^p H^{i+2n} f_* K_0(n).$$

下述定理是 [1] (6.2.13) 的相对推广。

定理 (相对 Lefschetz 困难定理) 5.4.10. 若 F_0 是 X_0 上的纯层, 则对每个 $i \geq 0$, 态射

$$\ell^i : {}^p H^{-i} f_* F_0 \xrightarrow{\sim} {}^p H^i f_* F_0(i)$$

都是同构。

问题在 Y_0 上是局部的。缩小 Y_0 , 并把 ℓ 换成它的一个倍数之后, 可设 f 有分解

$$X_0 \hookrightarrow \mathbb{P}_0^d \times Y_0 \longrightarrow Y_0$$

(其中 $d \geq 0$ 适当), 且 ℓ 是 $\mathcal{O}(1)$ 的第一 Chern 类。

先证 $i = 1$ 。当 Y_0 是一点时, [1] 的证明是取 X 的一个充分一般的超平面截面 H , 把 ℓ 看成限制态射与 Gysin 态射 (*Gysin morphism*; 法: *morphisme de Gysin*) 的复合

$$H^{-1}(X, F) \xrightarrow{v^*} H^{-1}(H, F) \xrightarrow{v_!} H^1(X, F)(1),$$

再证明 v^* 把 $H^{-1}(X, F)$ 等同于 H 变动时 $H^{-1}(H, F)$ 中由单值作用固定的部分, 而对偶地, $v_!$ 把 $H^1(X, F)(1)$ 等同于单值作用的余不变量。单值表示的半单性于是说明 $v_! v^*$ 是同构。这里沿用同一思路, 不过使用超平面截面的泛族, 而非单个超平面截面。

令 $\check{\mathbb{P}}_0^d$ 为 $\mathbb{P}_0^d$ 的对偶射影空间 (*dual projective space*; 法: *espace projectif dual*), 并置

$$Y'_0 = \check{\mathbb{P}}_0^d \times Y_0, \quad X'_0 = \check{\mathbb{P}}_0^d \times X_0.$$

令 $H_0 \subset X'_0$ 为 X_0 的超平面截面的泛族: 对 $(a, y) \in Y'_0$, H_0/Y'_0 在 (a, y) 处的纤维, 是 X/Y 在 y 处的纤维 X_y 与超平面 “ a ” 的交 $X_y \cap a$ 。记各态射如下:

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xleftarrow{u} & X'_0 & \xleftarrow{v} & H_0 \\ \downarrow f & & \downarrow f & \nearrow h & \\ Y_0 & \xleftarrow{u} & Y'_0 & & \end{array}$$

注意图中不同的箭头沿用同一字母; 上下文足以排除歧义。

引理 5.4.11. 设 $K \in {}^pD_c^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 。则:

(i) 有

$$u^* f_* K \xrightarrow{\sim} f_* u^* K,$$

因而

$$(u^* {}^pH^i f_* K)[d] \xrightarrow{\sim} {}^pH^{i+d} f_* u^* K.$$

(ii) 当 $i < d - 1$ 时, 有同构

$${}^pH^i f_* u^* K \xrightarrow{\sim} {}^pH^i h_*(uv)^* K.$$

(iii) 有单射

$${}^pH^{d-1} f_* u^* K \hookrightarrow {}^pH^{d-1} h_*(uv)^* K,$$

且左端等同于右端中来自 Y 的最大歳子层 (定义见 4.2.6)。

态射 u 光滑且纯相对维数为 d , 故 $u^*[d]$ 是 t -正合的 (4.2.4), 从而得到 (i)。令 g 为 $U = X' - H$ 到 Y' 的投影。它是仿射态射; 又因

$$u^* K \in {}^pD^{\geq d}(X'),$$

有 (4.1.2)

$$g_! u^* K|_U \in {}^pD^{\geq d}(Y').$$

于是三角

$$(g_!(u^* K|_U), f_* u^* K, h_*(uv)^* K)$$

给出 (ii) 以及 (iii) 中的单射。要验证 (iii) 的其余部分, 只须依 4.2.6 证明

$${}^pH^{-d} u_* {}^pH^{d-1} f_* u^* K \xrightarrow{\sim} {}^pH^{-d} u_* {}^pH^{d-1} h_*(uv)^* K. \quad (5.4.11.1)$$

若 $d = 0$, 则 f 是闭浸入、 $H = \emptyset$, 两端均为零。以下设 $d \geq 1$ 。

引理 5.4.12. 设 $q: Q \rightarrow X$ 是相对维数为 d 的射影空间丛 (*projective bundle*; 法: *fibré projectif*), η 是 $\mathcal{O}(1)$ 的第一 Chern 类, 且 $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 。则

$$\sum \eta^i : \bigoplus_{i=0}^d K[-2i](-i) \xrightarrow{\sim} q_* q^* K.$$

逐纤维检验即可归约到 X 为一点的情形; 再对 K 作剥离, 可归约到 $K = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[0]$ 。此时断言就是射影空间上同调的熟知结构。

5.4.13

证明 (5.4.11.1) ($d \geq 1$)。对 u 与 uv 应用 5.4.12, 得到

$$u_* f_* u^* K = f_* u_* u^* K = \bigoplus_{i=0}^d f_* K[-2i](-i)$$

及

$$u_* h_*(uv)^* K = f_*(uv)_*(uv)^* K = \bigoplus_{i=0}^{d-1} f_* K[-2i](-i).$$

两者只相差直和项 $f_* K[-2d](-d)$ 。

f 的纤维维数不超过 d , 故由 4.2.4,

$$f_* K \in {}^p D^{\geq -d}(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

并且

$${}^p H^i u_* f_* u^* K \xrightarrow{\sim} {}^p H^i u_* h_*(uv)^* K \quad (i \leq d-1),$$

特别地, 对 $i \leq 0$ 亦然。

对 $L = f_* u^* K$ 与 $L = h_*(uv)^* K$ 的截断三角施以 u_* , 所得两个三角形 (其中下排第三项依勘误修正)¹¹⁴ 及其间态射为

$$\begin{array}{ccccc} u_* {}^p \tau_{< d-1} f_* u^* K & \longrightarrow & u_* f_* u^* K & \longrightarrow & u_* {}^p \tau_{\geq d-1} f_* u^* K \\ \sim \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ u_* {}^p \tau_{< d-1} h_*(uv)^* K & \longrightarrow & u_* h_*(uv)^* K & \longrightarrow & u_* {}^p \tau_{\geq d-1} h_*(uv)^* K. \end{array}$$

由 (ii), 左边的竖箭头是同构。比较这两个三角形的崴上同调长正合列, 得到

$${}^p H^{-1} u_* {}^p \tau_{\geq d-1} f_* u^* K \xrightarrow{\sim} {}^p H^{-1} u_* {}^p \tau_{\geq d-1} h_*(uv)^* K.$$

由于 u_* 的上同调幅度不小于 $-d$, 有

$${}^p H^{-1} u_* {}^p \tau_{\geq d-1} = {}^p H^{-d} u_* {}^p H^{d-1},$$

这正是 (5.4.11.1)。

¹¹⁴据勘误第 76 条修正。

5.4.14

证明 5.4.10 的 $i = 1$ 情形。与限制态射

$$(u^*{}^pH^{-i}f_*F)[d] = {}^pH^{-i}f_*(u^*F[d]) \longrightarrow {}^pH^{-i+1}h_*((uv)^*F[d-1])$$

对偶, 我们有 Gysin 态射

$${}^pH^j h_*((uv)^*F[d-1]) \longrightarrow u^*({}^pH^{j+1}f_*F)[d](1),$$

二者在 $j = -i + 1$ 时的复合, 就是 ℓ 的作用施以 $u^*[d]$ 后所得的态射。

当 $i = 1$ 时, 由 5.4.11, $(u^*{}^pH^{-1}f_*F)[d]$ 是

$${}^pH^0 h_*((uv)^*F[d-1])$$

中来自 Y 的最大子对象。对偶地, $(u^*{}^pH^1f_*F)[d](1)$ 是它来自 Y 的最大商对象。因为 F_0 纯, 由 5.1.14, $(uv)^*F_0$ 与 $h_*(uv)^*F_0$ 均纯; 再由 5.4.1, ${}^pH^0 h_*(uv)^*F_0$ 也纯。因此

$${}^pH^0 h_*((uv)^*F[d-1])$$

由 5.3.7 是半单的,¹¹⁵其来自 Y 的最大子对象同构地映到来自 Y 的最大商对象。故 ℓ 在施以 $u^*[d]$ 后成为同构; 由于 $u^*[d]$ 保守, ℓ 本身亦为同构。

5.4.15

完成 5.4.10 的证明。对 i 归纳。 $i = 0$ 显然, $i = 1$ 已证。若 $i \geq 1$, 则 ℓ^{i+1} 施以 $u^*[d]$ 后, 可写成复合

$$\begin{aligned} (u^*{}^pH^{-i-1}f_*F)[d] &\longrightarrow {}^pH^{-i}h_*((uv)^*F[d-1]) \\ &\xrightarrow{\ell^i} {}^pH^i h_*((uv)^*F[d-1])(i) \\ &\xrightarrow{\text{Gysin}} (u^*{}^pH^{i+1}f_*F)[d](i+1). \end{aligned}$$

第一箭头由 5.4.11 (i)、(ii) 是同构; 最后一箭头是它的对偶, 也是同构; 中间一箭头则由归纳假设应用于 h 和 $(uv)^*F_0[d-1]$ 而为同构。定理得证。

¹¹⁵译者注: 原文此处引用“5.3.7”, 这里保留。半单性实际由 5.3.8 得到; 2018 勘误 73 只指明旧版第 142 页的另一处引用。这里应先对纯复形 $h_*(uv)^*F_0[d-1]$ 应用 5.4.1, 得到显示的第零崴上调层纯, 再用 5.3.8。

6 从 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{C}$

本章旨在说明并论证一套方法：怎样从有限域代数闭包上的真命题（例如 5.3、5.4 的结果），推出 $\mathbb{C}$ 上的命题。事实上，在 6.1 的讨论中，可以把从 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{C}$ 换成到任意特征不等于 ℓ 的代数闭域 k ；由此可对 k 上簇中几何来源的（*of geometric origin*；法：*d'origine géométrique*）半单 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -层得到 6.2.5、6.2.8、6.2.10 的类似结论。¹¹⁶

6.1 原理

6.1.1

要从 $\mathbb{F}$ 上的命题推出复代数簇的几何命题，分两步进行；中间先得到一个 $\mathbb{C}$ 上、却不涉及基域 $\mathbb{C}$ 的拓扑的命题。若所论命题属于上同调或同伦论，就把复代数簇的经典拓扑换成平展拓扑，并把系数

$$\mathbb{Z}/\ell, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{C}$$

依次换成

$$\mathbb{Z}/\ell, \quad \mathbb{Z}_\ell, \quad \mathbb{Q}_\ell, \quad \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

这种转译并非总能进行：

- 平展拓扑不能检测 π_1 本身，只能检测其投射有限完备化（*profinite completion*；法：*complété profini*） $\widehat{\pi}_1$ ；不过对正规簇而言，它至少能做到这一点。若 π_1 有限，它还能检测

$$\widehat{\pi}_i = \pi_i \otimes \widehat{\mathbb{Z}} \quad (i > 1),$$

但若 π_1 无限，高阶 π_i 未必有限生成，因而可能丢失（参见 Artin–Mazur, *Étale homotopy*, Springer Lecture Notes in Math. 100）。

- 平展拓扑只适于 ℓ -进系数。不能指望使用 $\mathbb{Z}$ 、 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$ 系数：整格以及二次型的符号差都会丢失。
- 上同调的 Hodge 结构（或混合 Hodge 结构）在 ℓ -进上同调中会丢失。不过， $H^*(X, \mathbb{Q})$ 的权滤过是几何定义的，因而有 ℓ -进对应物；一个应用见 6.2.3。

此外，必须处理复代数簇与代数态射，而不能只处理复解析簇与解析态射。例如，5.3、5.4 给出了射影簇上的定理，但对 Kähler 簇的类似结果尚不知晓。

¹¹⁶据勘误第 77 条修正。

6.1.2

设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形。把拓扑空间 $X(\mathbb{C})$ 与 X 的平展拓扑联系起来，有比较态射（即拓扑斯的态射）

$$\varepsilon : X(\mathbb{C}) \longrightarrow X_{\text{et}}.$$

基本结果如下。

(A) 函子 ε^* 给出 X_{et} 上可构造集合层范畴与 $X(\mathbb{C})$ 上可构造集合层范畴的等价。这里“可构造”是指：存在代数分层，使层在每一片层上局部常值且纤维有限。其变体如下。

(A') 对任意有限环 R ，有范畴等价

$$\varepsilon^* : \{X_{\text{et}} \text{ 上可构造的 } R\text{-模层}\} \xrightarrow{\sim} \{X(\mathbb{C}) \text{ 上可构造的 } R\text{-模层}\}.$$

(A'') 对任意素数 ℓ ，有范畴等价

$$\varepsilon^* : \{X_{\text{et}} \text{ 上可构造的 } \mathbb{Z}_\ell\text{-层}\} \xrightarrow{\sim} \{X(\mathbb{C}) \text{ 上可构造的 } \mathbb{Z}_\ell\text{-模层}\}.$$

由 (A') 取投射极限推出 (A'') 时，还需假设各片层局部可缩，或至少满足相应的局部可缩性条件。此外，若 U 是若干片层组成的开集， $Z = X \setminus U$ ， $j : U(\mathbb{C}) \hookrightarrow X(\mathbb{C})$ ， $i : Z(\mathbb{C}) \hookrightarrow X(\mathbb{C})$ ，而 F 是 $U(\mathbb{C})$ 上的可构造 $\mathbb{Z}_\ell$ -层，还要用到

$$i^* j_* F \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n i^* j_* (F/\ell^n F).$$

对由局部有限三角剖分给出的分层等“良好分层空间”，这一比较成立。¹¹⁷

对 $\mathbb{Q}_\ell$ -层， ε^* 只保证全忠实。设 X 正规连通并取基点 $x \in X(\mathbb{C})$ 。 $X(\mathbb{C})$ 上秩有限的局部常值 $\mathbb{Q}_\ell$ -层 F 属于其本质像，当且仅当 $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)$ 在 F_x 上的作用稳定某个格，即稳定一个生成 F_x 的有限型 $\mathbb{Z}_\ell$ -子模。若 F 在某个片层正规连通的分层 (2.1) 各片层上局部常值，则须对每个片层 S 的 $F|_S$ 满足同一条件。 E_λ -层与 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -层亦然。另一方面，由于这些基本群有限生成，若 F 是 $X(\mathbb{C})$ 上可构造的 $\mathbb{Q}$ -向量空间层，则除有限多个 ℓ 外， $F \otimes \mathbb{Q}_\ell$ 都在 ε^* 的本质像中。要把可构造层的研究归约到 ℓ -进情形，往往更方便先把待证命题归约到 (A')；例见 6.2.1。

导出范畴也有类似结论。

(B') 对任意有限环 R ，有范畴等价

$$\varepsilon^* : D_c^b(X, R) \xrightarrow{\sim} D_c^b(X(\mathbb{C}), R).$$

这里下标 c 表示“上同调层可构造”。

(B'') 有范畴等价

$$\varepsilon^* : D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} D_c^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell).$$

左端是三角范畴

$$2\text{-}\varprojlim_n D_{ctf}^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$$

¹¹⁷据勘误第 78 条修正。

(其中 tf 表示有限 Tor 维数), 右端则是通常导出范畴的一个子范畴。

在 $\mathbb{Q}_\ell$ -上同调中, 比较函子仍只保证全忠实。一个对象 K 属于本质像, 当且仅当它的各个上同调层都属于本质像; E_λ 与 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -上同调同样如此。

函子 ε^* 与通常的上同调运算交换, 只要限于可构造层。关键结果是 SGA 4 XVI 4.1:

(C) 若 $f: X \rightarrow Y$ 是 $\mathbb{C}$ 上有限型概形之间的态射, 则对 X 上任意可构造挠层 F , 有

$$\varepsilon^* R^q f_* F \xrightarrow{\sim} R^q f_* \varepsilon^* F.$$

这里假设 F 可构造至关重要。例如, 取 $X = \mathbb{A}^1$ 、 Y 为一点, 并令

$$F = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})_n,$$

结论便会失效。

由此形式地推出:

(C') 在 $\mathbb{Z}/\ell^n$ 、 $\mathbb{Z}_\ell$ 、 $\mathbb{Q}_\ell$ 或 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -上同调中, 也就是说, 在相应的有界可构造导出范畴内, ε^* 与函子

$$Rf_*, \quad Rf_!, \quad f^*, \quad Rf^!, \quad \overset{L}{\otimes}, \quad R\text{Hom}$$

交换。

证明. 关键是 SGA 4 XVI 4.1 的 $R^q f_*$ 比较定理。对可构造集合层 (相应地, 群层), 当 $q = 0$ (相应地, $q = 0, 1$) 时该定理也成立。对局部常值集合层, $(A')^{118}$ 来自 π_0 、 π_1 的比较定理: 后者可由 SGA 4 XVI 4.1 在 $q = 0, 1$ 且 $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$ 时推出。一般情形用 Noether 归纳。取足够小的稠密开集 U , 使所论诸层在 U 上局部常值; 令 F 为其闭补集。由开闭粘合资料—— U 上的层 F_U 、 F 上的层 F_F , 以及粘合态射

$$F_F \longrightarrow i^* j_* F_U$$

——可以重建 X 上的层, 且经典拓扑与平展拓扑皆如此。归纳假设适用于 F , 而 U 上局部常值层已有比较定理; 再用 j_* 的比较定理即可结束。

(A) 很容易推出 (A')、(A'')。通常的上同调运算可归约到浸入 f 的 $f_!$, 以及任意 f 的 f^* 、 Rf_* 。对 $Rf_!$, 把 f 写成 gh , 其中 g 真、 h 为开浸入, 则 $Rf_! = Rg_* h_!$ 。对 $Rf^!$, 把 f 写成 gh , 其中 g 光滑、 h 为闭浸入, 则

$$Rf^! = Rh^! Rg^!.$$

Poincaré 对偶定理按 g^* 计算 $Rg^!$: 若 g 纯相对维数为 d , 则

$$Rg^! K = g^* K[2d](d).$$

最后, 若 j 是 h 的像的开补集, 则三角

$$(h_* Rh^! K, K, Rj_* j^* K)$$

¹¹⁸译者注: 原文此处标为 (A'), 但集合层的等价是 (A); (A') 是模层版本。下文先证明集合层版本, 再推出模层版本。

使我们能由 Rj_* 控制 $Rh^!$ 。所需类型的分解 $f = gh$ 未必整体存在，但它局部存在。比较箭头一经定义，这便足够；例如，可由 $Rf_!$ 的比较同构及伴随关系 $(Rf_!, Rf^!)$ 定义比较箭头。

$R\text{Hom}(K, L)$ 的情形可通过剥离归约到 Rf_* 、浸入 f 的 $f_!$ ，以及 K 为局部常值层的情形；所用公式是

$$Rf_* R\text{Hom}(K, Rf^! L) = R\text{Hom}(f_! K, L).$$

6.1.3

消失圈理论也有比较定理；其陈述见 SGA 7 XIV 2.8。

6.1.4

第一步中不再看见 $\mathbb{C}$ 的拓扑，因此必须留意 Tate 扭曲：

- 若 X 纯维数为 d ，则基本类给出态射

$$H_c^{2d}(X, \mathbb{Z}/\ell^n(d)) \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^n.$$

- 若光滑的 X 嵌入光滑的 Y ，且纯余维数为 d ，则 Gysin 态射为

$$H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n) \longrightarrow H^{i+2d}(Y, \mathbb{Z}/\ell^n(d)), \quad \dots$$

以下几点有助于辨认这些扭曲：

- 即使在经典理论中，若只把 $\mathbb{C}$ 取作 $\mathbb{R}$ 的一个代数闭包，而不指定哪个平方根是 i 、哪个是 $-i$ ，它们至少也会模 2 地出现。事实上，令

$$\mathbb{Z}(1) = \ker(\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*) = 2\pi i \mathbb{Z}.$$

选定 i ，便由 $1 \mapsto 2\pi i$ 把 $\mathbb{Z}$ 等同于 $\mathbb{Z}(1)$ ；把 i 换成 $-i$ ，则把此同构换成其相反数。同样，选定 i 就确定了 $\mathbb{C}$ 以及一切光滑簇的定向；把 i 换成 $-i$ ，会反转奇维簇的定向。因此，不依赖 i 的选择，纯维数为 d 的光滑簇的定向层等同于常值层

$$\mathbb{Z}(d) := \mathbb{Z}(1)^{\otimes d},$$

而基本类把 $H_c^{2d}(X, \mathbb{Z}(d))$ 映到 $\mathbb{Z}$ 。 ℓ -进基本类由这个整系数基本类以及指数映射所给的同构

$$\mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n(1), \quad z \mapsto \exp(z/n)$$

得到。

- 在 De Rham 上同调中，这些扭曲对应因子 $(2\pi i)^d$ 。
- 一个便于记忆的规则是：在导出范畴中，扭曲 (d) 通常与平移 $[2d]$ 同时出现。例如，当 f 光滑且纯相对维数为 d 时，

$$Rf^! K = f^* K[2d](d).$$

注意运算 $K \mapsto K[2d](d)$ 保持权不变。

6.1.5

上述方法并非总能直接套用。以相交同调为例：用奇异链来定义相交（上）同调时，要求链及其边界与某个适当分层的各片层之交维数不太大。这个定义本身不能原样转译为平展上同调；但一旦把相交上同调认作超上同调

$$\mathbb{H}^*(X, j_{!*}(\mathbb{Q}[d]))$$

（其中 j 是维数为 d 的稠密光滑开集的浸入，而 $j_{!*}$ 按 2.1.11 描述），转译便立即完成。

6.1.6

在进入第二步——把不涉及 $\mathbb{C}$ 拓扑的命题从 $\mathbb{C}$ 转到 $\mathbb{F}$ ——之前，尽管逻辑上并非必需，我们先用一个例子说明怎样把定义在 $\mathbb{C}$ 上的簇换成定义在数域上的簇。

设 X 是复射影簇。它由 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 中有限个齐次方程

$$P_\alpha = 0$$

定义，记 $a_{\alpha\beta}$ 为 P_α 的系数。把这些系数视为不定元，则诸 P_α 定义了一族由仿射空间 S 参数化的射影簇；得到射影态射

$$f: Y \longrightarrow S,$$

其中 X 是 $s \in S$ 处的纤维， s 的坐标就是原先各 $a_{\alpha\beta}$ 的值。态射 f 由 $\mathbb{Q}$ 上的态射作标量扩张而来；下文简称它定义在 $\mathbb{Q}$ 上。

设 $f: Y \rightarrow S$ 是 $\mathbb{Q}$ 上有限型概形之间的分离态射。存在 S 的一个分层 T （定义在 $\mathbb{Q}$ 上），使对每个片层 T ，限制

$$f_T: Y_T \longrightarrow T$$

的纤维“拓扑局部常值”；例如， $Y_T(\mathbb{C}) \rightarrow T(\mathbb{C})$ 是拓扑局部平凡纤维化。这来自 Thom 同痕定理以及 Whitney 条件的代数表述（见 J. L. Verdier, *Inventiones* 36 (1976), 295–312, cor. 5.1）。

每个片层的每个连通分支都有一个定义在数域上的点¹¹⁹。若 $s \in S(\mathbb{C})$ ，而同一片层的同一连通分支中有一点 t 定义在数域上，则 Y_s 与 Y_t 同胚。例如，要从 Y_t 的相交上同调 Lefschetz 困难定理推出复射影簇 $X = Y_s$ 的相应定理，可以使用这一点。事实上，给 X 配上 $\mathcal{O}(1)$ 的第一 Chern 类 ℓ 后， (X, ℓ) 与 (Y_t, ℓ) 同胚，断言遂由相交上同调的拓扑不变性（[6]）得到。也可以直接在配有适当分层的 Y 上工作，从而不诉诸这个不变性。

我们往往关心的不是单个簇 X ，而是态射

$$u: X_1 \longrightarrow X_2.$$

¹¹⁹据勘误第 79 条修正。

此时仍可找到定义在 $\mathbb{Q}$ 上的图

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{u} & Y_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & S & \end{array}$$

使 u 是在某个 $s \in S(\mathbb{C})$ 上取纤维所得。须注意，一般不存在 S 的分层 T ，能使同一片层的同一连通分支内， $u_t : f_1^{-1}(t) \rightarrow f_2^{-1}(t)$ 的拓扑类型保持常值：它可能连续变化。不过，可以取定义在 $\mathbb{Q}$ 上的分层 T ，使把 S 基变换到 T 后所得的

$$\begin{array}{ccc} Y_{1T} & \xrightarrow{u_T} & Y_{2T} \\ & \searrow & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

具有如下性质：对任意 $T' \rightarrow T$ ，由此得到笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} Y_{1T'}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{v} & Y_{1T}(\mathbb{C}) \\ u \downarrow & & \downarrow u \\ Y_{2T'}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{v} & Y_{2T}(\mathbb{C}), \end{array}$$

并且对 $Y_{1T}(\mathbb{C})$ 上任意局部系统 L ，有

$$v^* R^q u_* L \xrightarrow{\sim} R^q u_* v^* L.$$

把这一结果作适当加强（参见 6.1.2 中的诸归约），在实际应用中已经足够。

6.1.7

EGA IV §§8、9 列出了许多下述形式的结论。设交换环 A 是交换环 A_i 的滤过归纳极限；为简单起见，设 A 与各 A_i 均为 Noether 环。 $\text{Spec}(A)$ 上任何“有限呈示 (*finite presentation*; 法: *présentation finie*)”的对象 X ——例如有限型概形、此类概形间的态射、概形上的凝聚层等——都来自某个 $\text{Spec}(A_i)$ 上的同类对象 X_i ；而两个 X_i 的选择，在把指标充分增大后会给出同一对象 X_j ：

$$X_j = X_i \times_{\text{Spec}(A_i)} \text{Spec}(A_j).$$

若 P 是一个在基变换下稳定的“相对”性质，则 $X/\text{Spec}(A)$ 具有 P ，当且仅当充分大的 j 下 $X_j/\text{Spec}(A_j)$ 具有 P 。

我们关心的是

$$A = \mathbb{C} = \varinjlim A_i,$$

其中 A_i 遍历 $\mathbb{C}$ 中的有限型 $\mathbb{Z}$ -子代数。

变体. 对任意有限型 $\mathbb{Z}$ -代数 $A \subset \mathbb{C}$ ，存在 $0 \neq f \in A$ ，使 $\text{Spec}(A[1/f])$ 在 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上光滑。把所有有限型 $\mathbb{Z}$ -子代数按滤过顺序考察，并作余终的局部化后，仍有

$$\mathbb{C} = \varinjlim_i A_i,$$

且 $S_i := \text{Spec}(A_i)$ 在 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上光滑。

由此可知, $\mathbb{C}$ 上每个有限型概形 X 都来自某个 X_i/S_i ; 若 X, Y 来自 $X_i, Y_i/S_i$, 则态射 (相应地, 同构) $f: X \rightarrow Y$ 在充分大的 $j \geq i$ 时来自

$$f_j: X_j \longrightarrow Y_j.$$

同理, 两个 f_j 的选择在更大的 S_k 上相等。因此, X_i 在 “充分大的 i ” 意义下本质唯一。

同样, X 的一个分层、一个可构造 $\mathbb{Z}/\ell^n$ -模层、此类层间的态射等, 都来自充分大的 i 上的相应对象; 两个选择在进一步增大指标后相等。

记号. 对 $\mathbb{C}$ 上的一个 “对象” Ξ , 记 Ξ_S 为某个充分大的

$$S = \text{Spec}(A), \quad A \subset \mathbb{C} \text{ 为有限型 } \mathbb{Z}\text{-代数},$$

上的 “对象”, 使 Ξ 由 Ξ_S 沿 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 扩张标量得到; 若 $T \rightarrow S$, 则记 Ξ_T 为 Ξ_S 在 T 上的逆像。这个记号有歧义, 因为 Ξ_S 一般不唯一; 但前面的论证保证这种歧义无碍使用。

若 T 是 X 的光滑片层分层 (相应地, 连通片层分层), 则增大 S 后, T_S 的各片层在 S 上光滑 (相应地, 几何纤维连通)。若 X 上的层 F 在每一片层上局部常值, 增大 S 后, X_S 上的 F_S 也具有同一性质。

设 $f: X \rightarrow Y$ 是 $\mathbb{C}$ 上有限型概形之间的态射, F 是 X 上的可构造 $\mathbb{Z}/\ell^n$ -模层, 并取如上的

$$f_S: X_S \longrightarrow Y_S, \quad F_S/X_S.$$

SGA 4 1/2 (Th. finitude 1.9) 的有限性定理说明: 存在非空开集 $U \subset S$, 使对每个给出笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} X_{U'} & \xrightarrow{g} & X_U \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y_{U'} & \xrightarrow{g} & Y_U \end{array}$$

的概形态射 $g: U' \rightarrow U$, 都有

$$g^* R^q f_* F_U \xrightarrow{\sim} R^q f_* g^* F_U,$$

且诸 $R^q f_* F_U$ 都可构造。

推论. 给定有限多个 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形 X_i 、有限多个它们之间的态射, 以及有限多个 X_i 上的可构造 $\mathbb{Z}/\ell^n$ -模层, 可以把所有这些资料同时下降到某个充分大的

$$S = \text{Spec}(A), \quad A \subset \mathbb{C}$$

上。缩小 S 后, 可设通常的上同调运算

$$Rf_*, \quad Rf_!, \quad f^*, \quad Rf^!, \quad \overset{L}{\otimes}, \quad \mathcal{T}or_p, \quad \mathcal{E}xt^p$$

施于给定可构造层有限次后仍给出可构造层, 并与任意基变换 $S' \rightarrow S$ 交换。若 $a_i: X_{iS} \rightarrow S$ 是投影, 还可设这些运算的结果经 $R^* a_{i*}$ 后在 S 上局部常值。

6.1.8

以上只涉及 $\mathbb{Z}/\ell^n$ -模层。 $\mathbb{Z}_\ell$ -层是无限对象，一般不能从 $\mathbb{C}$ 下降到 S 。例如，在

$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, \infty\}$$

上存在单值表示并非拟么幂 (*quasi-unipotent*; 法: *quasi-unipotente*) 的光滑 $\mathbb{Z}_\ell$ -层; 这样的层不可能来自

$$\mathbb{G}_{m,K}, \quad K \subset \mathbb{C} \text{ 为有限型 } \mathbb{Q}\text{-扩张,}$$

上的 $\mathbb{Z}_\ell$ -层。

下面给出绕过这一障碍的方法。设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型概形, T 是 X 的一个片层光滑连通的分层 (2.1); 对每个 $T \in T$, 给定有限族 $L(T)$, 其元素为 T 上不可约光滑 $\mathbb{Z}/\ell$ -模层。取

$$(X_S, T_S, L_S)/S, \quad S = \text{Spec}(A), \quad A \subset \mathbb{C} \text{ 为有限型 } \mathbb{Z}\text{-代数,}$$

使其沿 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 扩张标量后给出 (X, T, L) 。设 S 已取得足够小, 使各片层 $T \in T_S$ 在 S 上光滑且几何纤维连通。对任意两个形如 $j_! L$ 的层 F, G , 其中

$$j : T \hookrightarrow X_S, \quad T \in T_S, \quad L \in L_S(T),$$

还要求诸

$$\mathcal{E}xt^q(F, G)$$

均与基变换 $S' \rightarrow S$ 相容; 并且, 若 a 为到 S 的投影, 则

$$R^p a_* \mathcal{E}xt^q(F, G)$$

在 S 上局部常值且与基变换相容。

这里还要求: 对每个 T , 有限族 $L_S(T)$ 中各层在几何纤维上不可约, 并且只出现有限多个同构类。¹²⁰

取

$$A \subset V \subset \mathbb{C},$$

其中 V 是一个严格 Hensel 离散赋值环, 其剩余域是 A 的某个有限剩余域的代数闭包。对 $\text{Spec}(A)$ 的任一闭点 a , 总能找到这样的 V , 使 $\text{Spec}(V) \rightarrow \text{Spec}(A)$ 把闭点映到 a 。为此, 可取一条“解析弧”, 即完备局部环 $\hat{A}_a$ 的一个一维商, 使这条弧不包含在 $\text{Spec}(A)$ 的任何真闭子集在 $\text{Spec}(\hat{A}_a)$ 中的逆像内。再将它正规化并严格 Hensel 化即可。

令 (X_V, T_V, L_V) 由 (X_S, T_S, L_S) 基变换得到, (X_s, T_s, L_s) 为其特殊纤维, 并记

$$X \xrightarrow{u} X_V \xleftarrow{i} X_s$$

为自然图。

¹²⁰ 据勘误第 80 条修正。

记

$$D_{T,L}^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$$

为 $D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ 的全子范畴：其中的对象 K 满足，诸普通上同调层 $H^i K$ 模 ℓ 约化后限制到每个片层 T ，都局部常值，且其组成因子属于 $L(T)$ 。同样定义

$$D_{T,L}^b(X_V, \mathbb{Z}_\ell), \quad D_{T,L}^b(X_s, \mathbb{Z}_\ell).$$

引理 6.1.9. 在上述记号下，函子¹²¹

$$D_{T,L}^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \xleftarrow[\sim]{u^*} D_{T,L}^b(X_V, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow[\sim]{i^*} D_{T,L}^b(X_s, \mathbb{Z}_\ell)$$

都是范畴等价。

此处 V 不必是离散赋值环：只要 $A \subset V \subset \mathbb{C}$ 是严格 Hensel 局部环，同样的两个限制函子仍为等价。¹²²

把 $\mathbb{Z}_\ell$ 换成 $\mathbb{Z}/\ell^n$ 后，断言可由 6.1.8 的比较条件形式地推出，但须注意： S 的选择直接给出的比较只适用于 $\mathbb{Z}/\ell$ 系数的 $\mathcal{E}xt$ 层，不能立即用于 $\mathbb{Z}/\ell^n$ 。缩小 S ，或使用标准谱序列，可先得到各全局 Ext^p 群在 X 、 X_V 与 X_s 上的比较同构。¹²³ 再验证有限 Tor 维数在这些等价下保持，依据 ℓ -进导出范畴的定义，将引理陈述中的

$$D_{T,L}^b(-, \mathbb{Z}_\ell)$$

换成

$$D_{T,L,\text{tf}}^b(-, \mathbb{Z}/\ell^n)$$

(tf 表示有限 Tor 维数) 后所得的等价，便给出 6.1.9。

6.1.10

因此，对给定的 (X, T, L) ，只要

$$S = \text{Spec}(A)$$

取得足够大，并如上选取 $A \subset V \subset \mathbb{C}$ ，便得到范畴等价

$$D_{T,L}^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \longleftrightarrow D_{T,L}^b(X_s, \mathbb{Z}_\ell), \quad (6.1.10.1)$$

它把 $\mathbb{C}$ 联系到有限域的代数闭包。

增大 S 后， T_S, L_S 的两个选择会以相容方式相等。令 $\mathcal{V}$ 为所有离散赋值环

$$V \subset \mathbb{C}$$

¹²¹据勘误第 81 条修正。

¹²²据勘误第 82 条修正。

¹²³据勘误第 83 条修正。

组成的集合，其剩余域均为有限域的代数闭包。对有限型 $\mathbb{Z}$ -代数 $A \subset \mathbb{C}$ ，令 $\mathcal{V}(A)$ 为其中满足 $A \subset V$ 的那些 V ；诸 $\mathcal{V}(A)$ 按反向包含组成滤过基。以下只考虑相应滤过下的芽。

若 X 是 $\mathbb{C}$ 上有限型概形，并由 X_S/S 扩张标量得到，则当 $V \in \mathcal{V}(A)$ 时，特殊纤维 X_s 所成系统的芽只依赖于 X ，且在唯一同构意义下成立。其他一切“有限呈示”对象亦然。对给定 (X, T, L) ，范畴等价 (6.1.10.1) 所成系统的芽也只依赖于 (X, T, L) 。

若 (T', L') 加细 (T, L) ，则前者的等价系统之芽自然诱导后者的等价系统之芽。不过，我们只有芽，不能直接取极限而得到

$$D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell) \longleftrightarrow D_c^b(X_s, \mathbb{Z}_\ell)$$

的整体等价；只能断言： $D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ 中每个对象 K ，都定义了 $D_c^b(X_s, \mathbb{Z}_\ell)$ 中对象系统的一个芽。

若 (T, L) 还满足：

- (a) 各片层光滑且连通；
- (b) 对每个 $j: T \hookrightarrow X$ 、每个 $F \in L(T)$ ，以及 $T' \in T$ ，诸

$$R^q j_* F|_{T'}$$

都局部常值，且其组成因子属于 $L(T')$ ，

则可令同样的性质在 S 上成立，并使 $R^q j_* F$ 与任意基变换交换。于是对 T 上任意崴度函数 p ，6.1.9 的等价保持崴 t -结构；等价系统 (6.1.10.1) 的芽也具有同一性质。

利用 6.1.7，还可令 6.1.9 的等价以及 (6.1.10.1) 的等价系统之芽与通常的上同调运算相容。例如，对 $T = R\text{Hom}$ 或 $\overset{L}{\otimes}$ ，可以把每个 (T, L) 加细为 (T', L') ，使

$$T: D_{T,L}^b \times D_{T,L}^b \longrightarrow D_{T',L'}^b,$$

再选取 S ，使对上述各 V ，6.1.9 的等价与 T 交换。对态射 $f: X \rightarrow Y$ （或 $Y \rightarrow X$ ），同理可在 Y 上取 (T', L') ，使

$$Rf_*, Rf! \quad (\text{或 } f^*, Rf^!)$$

把 $D_{T,L}^b$ 映入 $D_{T',L'}^b$ ，且诸等价与这些函子交换。

对 $R\text{Hom}$ 与 $\overset{L}{\otimes}$ ，还可利用 $L(T)$ 中诸层的单值表示之像有限，把 (T, L) 进一步加细为 (T', L') ，使 $D_{T',L'}^b$ 对这两个函子稳定。

缩小 S 后，还可设 (6.1.10.1) 限制到层时保持：

- F 在每个片层各点的纤维的 $\mathbb{Z}_\ell$ -模结构，包括秩和挠部分的初等因子 (*elementary divisor*；法：*diviseur élémentaire*)；
- F 的光滑性。这里可先归约到 $\mathbb{Z}/\ell$ -模层，因为 $\mathbb{Z}_\ell$ -层光滑，当且仅当 $\ell: F \rightarrow F$ 的核与余核都光滑；

- 当 X 光滑连通且 F 光滑时的单值表示。为此可缩小 X 使只有一个片层；这不改变单值群。再取有限连通覆盖，使 $L(X)$ 中各层都平凡；于是利用

$$\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X_V), \quad \pi_1(X_s) \longrightarrow \pi_1(X_V)$$

在 $H^1(-, \mathbb{Z}/\ell)$ 与 $H^2(-, \mathbb{Z}/\ell)$ 上诱导同构，进而在投射 ℓ -完备化上诱导满射。¹²⁴

由 $\mathbb{Z}_\ell$ -导出范畴的等价系统，立即得到 $\mathbb{Q}_\ell$ 、 E_λ 与 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -导出范畴的相应系统。验证 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -层的光滑性可用以下事实：

- (a) F 光滑，当且仅当它在 X_{red} 的正规化上的逆像光滑；
- (b) 若 X 正规连通， $j : U \hookrightarrow X$ 为稠密开浸入，则 F 光滑，当且仅当其纤维等维、 $F|_U$ 光滑，且自然态射

$$F \xrightarrow{\sim} j_* j^* F$$

是同构。

6.2 例

6.2.1 仿射概形的上同调维数

设 X 是 $\mathbb{C}$ 上维数为 d 的仿射概形。我们要由 ℓ -进上同调中的类似结果 (4.1.4) 推出：对 $X(\mathbb{C})$ 上任意可构造的复向量空间层 F ，

$$H^i(X(\mathbb{C}), F) = 0 \quad (i > d).$$

以下简记 $X(\mathbb{C})$ 为 X 。

通过剥离，可设

$$F = j_! L,$$

其中 $j : Y \hookrightarrow X$ 是连通局部闭子概形的浸入， L 是 Y 上的复局部系统。取 $y \in Y$ 。局部系统 L 由 $\pi_1(Y, y)$ 在

$$L_y \simeq \mathbb{C}^n$$

上的表示定义。因为 $\pi_1(Y, y)$ 有限生成，这个表示可分解为

$$\rho_A : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \text{GL}(n, A),$$

其中 $A \subset \mathbb{C}$ 是有限型 $\mathbb{Z}$ -代数。于是

$$L = L_A \otimes_A \mathbb{C},$$

其中 L_A 是自由 A -模的局部系统。令

$$F_A = j_! L_A.$$

¹²⁴据勘误第 84 条修正。

我们把下列事实视为已知：诸 $H^i(X, F_A)$ 都是有限型 A -模；而对任意 A -模 M ，有

$$R\Gamma(X, F_A \otimes_A M) \simeq R\Gamma(X, F_A) \overset{L}{\otimes}_A M.$$

这些有限性结论来自如下事实：若 $\overline{X}$ 是 X 的射影紧化，则 $(\overline{X}, \overline{X} - X)$ 可三角剖分。

令 N 为满足 $H^N(X, F_A) \neq 0$ 的最大整数。于是对任意 A -模 M ，

$$H^N(X, F_A \otimes_A M) = H^N(X, F_A) \otimes_A M.$$

反设 $N > d$ 。取 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$ ，并置

$$F_{A/\mathfrak{m}} = F_A \otimes_A A/\mathfrak{m}.$$

由于 $A/\mathfrak{m}$ 有限， $F_{A/\mathfrak{m}}$ 是 Y_{et} 上某个层 $F_{A/\mathfrak{m}}^{\text{et}}$ 经 ε^* 所得。¹²⁵于是

$$\begin{aligned} H^N(X, F_A) \otimes_A A/\mathfrak{m} &= H^N(X, F_{A/\mathfrak{m}}) \\ &\xrightarrow[6.1.2 \text{ (C)}]{\sim} H^N(X_{\text{et}}, F_{A/\mathfrak{m}}^{\text{et}}) = 0, \end{aligned}$$

最后一个等号来自 4.1.4，因为 $N > d$ 。这对每个 $\mathfrak{m}$ 都成立；而 $H^N(X, F_A)$ 是有限型的，故它只能为零，矛盾。因此

$$H^i(X, F_A) = 0 \quad (i > d).$$

再由

$$H^i(X, F) = H^i(X, F_A) \otimes_A \mathbb{C}$$

得到所求结论。

变体. 与其对 F 作剥离归约到 $F = j_! L$ ，也可以直接写成

$$F = F_A \otimes_A \mathbb{C},$$

其中 A 如上，而 F_A 是纤维为自由 A -模的可构造层。

注记. 上述结果还不够强。事实上，只要 X 是 Stein 空间 (*Stein space*；法： *espace de Stein*)， F 是某个局部有限解析分层各片层上的局部常值阿贝尔层，便有

$$H^i(X, F) = 0 \quad (i > \dim_{\mathbb{C}} X).$$

这可由 Morse 理论的适当变体证明；见 [Ham95]。¹²⁶

¹²⁵译者注：原文此处写作 Y_{et} 。由 $F_A = j_! L_A$ 可知， $F_{A/\mathfrak{m}}$ 是 X 上的层，故此处应为 X_{et} ；下一行也在 X_{et} 上取上同调。

¹²⁶据勘误第 85 条修正。

6.2.2 权滤过

设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的概形。要在 X 的上同调上得到混合 Hodge 结构，先以带有适当紧化

$$X_* \hookrightarrow \overline{X}_*$$

的单纯概形替换 X ([3])。单纯概形是无限对象：它含有无穷多个 X_i 和无穷多箭头，未必能整体下降到

$$S = \operatorname{Spec}(A), \quad A \subset \mathbb{C} \text{ 为有限型 } \mathbb{Z}\text{-代数}.$$

不过，要研究 $i \leq n$ 的 $H^i(X)$ ，只须知道 $i \leq n+1$ 时的 $X_i, \overline{X}_i$ ；截断图

$$(X_i)_{i \leq n+1} \hookrightarrow (\overline{X}_i)_{i \leq n+1}$$

可以下降到某个适当的 S 。¹²⁷

$H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ 的权滤过 $W_{\mathbb{Q}}$ ，是由

$$X_* \hookrightarrow \overline{X}_*$$

构造的谱序列的收敛滤过。同一谱序列存在于 ℓ -进上同调中。因此，由 $W_{\mathbb{Q}}$ 导出的

$$H^n(X, \mathbb{Q}_{\ell}) = H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_{\ell}$$

上的滤过 W_{ℓ} ，在删去 S 中特征为 ℓ 的闭子集后，可以延拓到 S ：¹²⁸若 $a: X_S \rightarrow S$ ，则 $R^n a_* \mathbb{Q}_{\ell}$ 有滤过 W_{ℓ} ，其在 $\mathbb{C}$ 上的纤维就是上述滤过。这里使用的是与上述截断单纯对象相联系的谱序列；参见 [MO15] §4.1.2。¹²⁹ 缩小 S 后，可设 $X_i, \overline{X}_i$ 在 $\mathbb{C}$ 上满足的条件对 $i \leq n+1$ 仍在 S 上成立，例如： $\overline{X}_{iS}$ 在 S 上真且光滑， $\overline{X}_{iS} - X_{iS}$ 是相对正规交叉除子；还可设

$$X_{iS} \longrightarrow (\cosq_{i-1} \operatorname{sq}_{i-1}(X_S)_*)_i$$

的满射性与真性保持，并且 W_{ℓ} 作为该谱序列的收敛滤过的形成与任意基变换交换。

利用 Weil 猜想可见：对 S 的每个闭点 s ， W_{ℓ} 在

$$H^n(X_s, \mathbb{Q}_{\ell})$$

上诱导的，正是按 Frobenius 特征值的复绝对值算术定义的 ℓ -进权滤过。下面给出一个应用。

命题 6.2.3. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是 $\mathbb{C}$ 上有限型概形之间的分离态射。假设 $R^n f_* \mathbb{Q}$ 局部常值，并且对每个 $y \in Y(\mathbb{C})$ ，¹³⁰都有

$$(R^n f_* \mathbb{Q})_y \xrightarrow{\sim} H^n(X_y, \mathbb{Q}).$$

¹²⁷据勘误第 86 条修正。

¹²⁸据勘误第 87 条修正。

¹²⁹据勘误第 88 条修正。

¹³⁰据勘误第 89 条修正。

则各 $H^n(X_y, \mathbb{Q})$ 的权滤过, 在局部系统 $R^n f_* \mathbb{Q}$ 上组成一个局部常值滤过。

只须在张量 $\mathbb{Q}_\ell$ 后证明。此时可由 [1] 3.4.1 推出: 若 F_0 是有限域上有限型概形 Y_0 上的光滑局部常值混合 $\mathbb{Q}_\ell$ -层, 则 F_0 有一个由光滑子层组成的权滤过, 其逐次商逐点纯, 权为相应指标。

6.2.3 的困难在于: 用于计算纤维 $X_y = f^{-1}(y)$ 上同调权滤过的紧化单纯概形, 未必能随 y 一致选取。不过, 只考虑截断单纯概形时, 可取 Y 的分层, 使在每个片层上都能作一致构造: 存在一个增广到 X_T 的截断紧化单纯概形

$$X_{*T} \hookrightarrow \overline{X}_{*T},$$

满足上面对 $(X_y)_*$ 所要求条件的相对版本。

把 $f: X \rightarrow Y$ 下降为

$$f_S: X_S \longrightarrow Y_S, \quad S = \text{Spec}(A),$$

则 “ $R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ 与取纤维交换” 的假设在缩小 S 后传给 f_S 。事实上, 可取 Y_S 的分层 T_S , 使每个片层 Y'_S 上的限制 $f'_S: X'_S \rightarrow Y'_S$ 满足: $Rf'_{S*} \mathbb{Q}_\ell$ 的形成与任意基变换交换。此时, f_S 所需的性质等价于: 对每个片层 Y'_S , 笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} X'_S & \longrightarrow & X_S \\ f'_S \downarrow & & \downarrow f_S \\ Y'_S & \xrightarrow{u} & Y_S \end{array}$$

给出同构

$$u^* R^n f_{S*} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R^n f'_{S*} \mathbb{Q}_\ell.$$

因此态射在 $\mathbb{C}$ 上是同构, 缩小 S 后, 它就在 S 的某个非空开集上是同构。

综合以上论证, 可取 Y 的分层 T , 使下降到适当 S 后, 对每个片层 Y'_S , 限制

$$f'_S: X'_S \longrightarrow Y'_S$$

满足:

- (a) $R^n f'_{S*} \mathbb{Q}_\ell$ 与取纤维交换;
- (b) $R^n f'_{S*} \mathbb{Q}_\ell$ 是光滑层, 并有由光滑子层组成的权滤过 W 。对每个 $y \in Y'(\mathbb{C})$, W 在 $H^n(X_y, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ 上诱导原有的权滤过。在 S 的每个闭点上方, 它诱导 ℓ -进权滤过。

最后, 只须注意: 适当选择 S 后, 6.1.10 的等价具有如下性质。若 Y 上的光滑层 F 在分层 T 的各片层上带有滤过 W_T , 而 F, W_T 分别对应于 F', W'_T , 则诸 W_T 能粘成由光滑子层组成的 F 的滤过, 当且仅当诸 W'_T 能这样粘成 F' 的滤过。这里 “能粘合” 等价于粘合箭头保持 W ; 光滑性则见 6.1.10。

注记. 除上述算术证明外, 我们不知道 6.2.3 的其他证明。

6.2.4

设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的有限型分离概形¹³¹, F 是 $X(\mathbb{C})$ 上复向量空间的简单层。若二元组 (X, F) 属于满足下列条件、并在同构下稳定的最小一类二元组¹³², 就称 F 是几何来源的:

(a) 该类包含二元组 $(\text{Spec } \mathbb{C}, \mathbb{C})$, 其中第二项是一点上的常值层;

(b) 对概形态射 f , 若

$$T = Rf_*, \quad Rf_!, \quad Rf^*, \quad Rf^!,$$

则可取 ${}^pH^i T$ 的简单组成因子;

(c) 可取

$${}^pH^i(A \otimes^L B) \quad \text{或} \quad {}^pH^i R\text{Hom}(A, B)$$

的简单组成因子。

由所有满足 “ ${}^pH^i(K)$ 的简单子商均为几何来源” 的 K 所成的

$$D_c^b(X, \mathbb{C})$$

的全子范畴, 对

$$f_*, \quad f_!, \quad f^*, \quad f^!, \quad \otimes, \quad R\text{Hom}$$

稳定。消失圈构造也保持几何来源。

特别地, 这一子范畴对中间扩张与对偶稳定。¹³³

若 $X(\mathbb{C})$ 上的层 F 是几何来源的简单层的直和, 就称它为几何来源的半单层。若

$$K \in D_c^b(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$

同构于

$$\bigoplus_i {}^pH^i(K)[-i],$$

且各 ${}^pH^i K$ 都是几何来源的半单层, 就称 K 为几何来源的半单复形。

例如, 若 $j: U \hookrightarrow X$ 是 Zariski 开浸入, U 光滑连通、维数为 d , 而 U 上的局部系统 L 的单值表示之像有限, 则

$$j_{!*} L[d]$$

是几何来源的半单层。事实上, L 是某个有限覆盖 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ 的 $\pi_* \mathbb{C}$ 的直和项¹³⁴¹³⁵, 而 $\tilde{X}$ 上的常值层 $\mathbb{C}$ 是一点上的常值层 $\mathbb{C}$ 的逆像。

定理 (分解定理) 6.2.5. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为真态射。若 $X(\mathbb{C})$ 上的 K 是几何来源的半单复形, 则 $Y(\mathbb{C})$ 上的 $Rf_* K$ 也是几何来源的半单复形。

¹³¹ 据勘误第 90 条修正。

¹³² 据勘误第 91 条修正。

¹³³ 据勘误第 92 条修正。

¹³⁴ 据勘误第 93 条修正。

¹³⁵ 译者注: 原文此处写作 X , 但 L 定义在 U 上。论证应先在 U 上取有限覆盖 $\pi_U: \tilde{U} \rightarrow U$, 使 L 为 $(\pi_U)_* \mathbb{C}$ 的直和项, 再利用中间扩张保持几何来源。

有限域上的精确版本如下：若 $f: X_0 \rightarrow Y_0$ 为真态射， $K \in D_c^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是纯崴层，则 Rf_*K 是有限多个纯崴层之平移的直和。应注意，5.4.5 的分解断言对 Y_0 上的一般对象并不成立。该结论可经射影情形、Lefschetz 困难定理和导出分解归约证明；文献中可参见 [dC15, Prop. 2.1.1] 与 [SZ16, Cor. 3.2.5]。¹³⁶

6.2.5 等价于如下变体：先把系数域 $\mathbb{C}$ 换成与之同构的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ，再把经典拓扑换成平展拓扑。

引理 6.2.6. 设 F 是几何来源的简单 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -崴层。充分增大

$$S = \text{Spec}(A)$$

后，6.1.10 中的每个等价

$$D_{T,L}^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longleftrightarrow D_{T,L}^b(X_s, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

都把 F 变为 X_s 上满足下列条件的简单 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -崴层 F_s ：

(P) X_s 由某个 $X_0/\mathbb{F}_q$ 扩张标量得到， F_s 由 X_0 上的纯崴层 F_0 扩张标量得到。

F_s 是简单崴层这一点来自 6.1.10。因为“几何来源”的定义是归纳的，只须证明 (P) 在该定义所用的运算下稳定；这些运算都与上述等价交换。具体说：

- (a) 一点上的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 满足 (P)；
- (b) 6.2.4 中的 ${}^pH^iT$ 把满足 (P) 的 F_s 变成由混合崴层 G_0 得到的 G_s ； G_0 的简单组成因子是纯的 (5.3.4)，而由 6.1.9、6.1.10， G_s 的简单组成因子满足 (P)；
- (c) 对 $\otimes^L$ 与 $R\text{Hom}$ 同理。¹³⁷

6.2.7

证明 6.2.5。只须处理 K 是崴层 F 的情形。¹³⁸应用 6.2.6，得到满足 (P) 的 F_s 。再应用 5.4.5 与 5.3.8，可知

$$Rf_*F_s$$

是其诸 ${}^pH^i[-i]$ 的直和，且这些崴上同调层均半单。由 6.1.10，同样的性质对 Rf_*F 成立；这就证明了 6.2.5。

推论（整体不变圈定理）6.2.8. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是 $\mathbb{C}$ 上有限型概形之间的真态射， $K \in D_c^b(X, \mathbb{C})$ 。设 V 是 Y 的一个 Zariski 开集，使 H^if_*K 在 V 上局部常值。若 K 是几何来源的半单复形，则有满射

$$H^i(X, K) \twoheadrightarrow H^0(V, H^if_*K). \quad (6.2.8.1)$$

¹³⁶据勘误第 94 条修正。

¹³⁷据勘误第 95 条修正。

¹³⁸译者注：应用 6.2.6 前，还可利用半单性把 F 分解为几何来源的简单崴层，并逐个处理其直和项。

特别地, 若 V 连通且 $y \in V(\mathbb{C})$,¹³⁹ 则 $\pi_1(V, y)$ 作用于

$$(H^i f_* K)_y = H^i(X_y, K), \quad X_y = f^{-1}(y),$$

而 (6.2.8.1) 可写成

$$H^i(X, K) \twoheadrightarrow H^i(X_y, K)^{\pi_1(V, y)}. \quad (6.2.8.2)$$

推论 (局部不变圈定理) 6.2.9. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为真态射, $K \in D_c^b(X, \mathbb{C})$, 且 $y \in Y(\mathbb{C})$.¹⁴⁰ 设 V 是 Y 的一个 Zariski 开集, 使 $H^i f_* K$ 在 V 上局部常值。对以 y 为中心的充分小球 B , 若 $j: B \cap V \hookrightarrow B$ 是浸入, 则

$$H^0(B \cap V, H^i f_* K) = (j_* j^* H^i f_* K)_y,$$

并且

$$H^0(B, H^i f_* K) \xrightarrow{\sim} (H^i f_* K)_y = H^i(X_y, K).$$

若 K 是几何来源的半单复形, 则有满射

$$H^i(X_y, K) \twoheadrightarrow H^0(B \cap V, H^i f_* K). \quad (6.2.9.1)$$

若再假设 $B \cap V$ 连通并取 $z \in B \cap V$, 则这又可写成

$$H^i(X_y, K) \twoheadrightarrow H^i(X_z, K)^{\pi_1(B \cap V, z)}. \quad (6.2.9.2)$$

6.2.9 中, 所述小球 B 的存在性是已知的。这里使用小球只是为了叙述方便; 也可以取其他构成基本邻域系的邻域, 例如由三角剖分定义的邻域。考虑到 6.2.5, 证明与 5.4.7–5.4.9 完全相同。

定理 (相对 Lefschetz 困难定理) 6.2.10. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为射影态射, ℓ 是一个相对丰沛可逆层的第一 Chern 类, F 是 X 上几何来源的半单层。则对每个 $i \geq 0$,

$$\ell^i: {}^p H^{-i} f_* F \xrightarrow{\sim} {}^p H^i f_* F(i).$$

该结论由 6.2.6 与 5.4.10 推出。取 Y 为一点, 便得到相交上同调中的 Lefschetz 困难定理这一重要特例。

注记 6.2.11. 我们希望能在上述命题中, 把“几何来源的”换成“形如

$$j_{!*} L[d]$$

的”, 其中 j 是维数为 d 的光滑连通簇 Y 的浸入, 而局部系统 L 是一个可极化 Hodge 结构变分 (polarizable variation of Hodge structures; 法: variation de structures de Hodge polarisable) 的底层局部系统。还希望能把代数簇换成紧 Kähler 簇。

¹³⁹ 据勘误第 96 条修正。

¹⁴⁰ 据勘误第 97 条修正。

此后已有显著进展: M. Saito 建立了混合 Hodge 模理论 [Sai88, Sai90]; T. Mochizuki [Moc15] 与 C. Sabbah [Sab13] 则给出了相应方向的进一步结果。¹⁴¹

若 f 是紧 Kähler 簇之间的态射, 我们既不知道怎样证明

$$Rf_*\mathbb{C}$$

是其诸 ${}^pH^i Rf_*\mathbb{C}[-i]$ 的直和, 也不知道怎样证明诸崱层 ${}^pH^i Rf_*\mathbb{C}$ 半单; 同样不知道 6.2.10 对

$$Rf_*(\mathbb{C}[\dim X])$$

的类似命题。

¹⁴¹据勘误第 98 条修正。

参考文献

- [1] P. Deligne : La conjecture de Weil II. Publ. Math. IHES 52 (1980), p. 137–252.
- [2] P. Deligne : Théorie de Hodge III. Publ. Math. IHES 44 (1974), p. 5–78.
- [3] P. Deligne : Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ -adique. Dans SGA 4 1/2, p. 233–251.
- [4] M. Goresky et R. MacPherson : La dualité de Poincaré pour les espaces singuliers. CR Acad. Sci. Paris 284 (27 juin 1977), p. 1549–1551.
- [5] M. Goresky and R. MacPherson : Intersection homology theory. Topology 19 (1980), p. 135–162.
- [6] M. Goresky and R. MacPherson : Intersection Homology II. Inv. Math. 72, 1 (1983), p. 77–130.¹⁴²
- [7] R. Hartshorne : Residues and duality. Lecture Notes in Math. 20 (1966).
- [8] L. Illusie : Complexe cotangent et déformations. Lecture Notes in Math. 239 (1971) and 283 (1972).
- [9] M. Raynaud : Caractéristique d’Euler-Poincaré d’un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes [d’après Šafarevič, Ogg et Grothendieck]. Séminaire Bourbaki 286 (1964/65). New York : Benjamin, 1966.
- [10] J.L. Verdier : Catégories dérivées, état 0. Dans SGA4 1/2, p. 262–308.¹⁴³

请注意：若干正负号约定与最初的油印讲义有所不同。

缩写

SGA : Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, paru, sauf SGA2, aux Lecture Notes in Mathematics.

¹⁴²据勘误第 99 条修正。

¹⁴³据勘误第 100 条修正。

SGA 4 : LN 269 (I–IV), LN 270 (V–VIII), LN 305 (IX–XIX).

SGA 4 1/2 : LN 569.

SGA 5 : LN 589.

SGA 7 : LN 288 (I–IX), LN 340 (X–XXII).

EGA : Éléments de géométrie algébrique, par A. Grothendieck et J. Dieudonné. EGA 4, 3^e partie = Publ. Math. IHES 28 (1966).

符号索引

下表依原书 “Index des notations” 重排，并采用本译稿的现代范畴记号。页码均可点击，指向符号在正文中的主要定义或首次系统使用处。

符号	含义	原书条目	页码
$\mathcal{D}$	三角范畴，通常配有心为 $\mathcal{C}$ 的 t -结构	1.3.1	22
$\mathcal{D}^{\geq a}, \mathcal{D}^{\leq b}$	t -结构的两个截断半范畴	1.3.1	22
$\mathcal{D}^{[a,b]} = \mathcal{D}^{\geq a} \cap \mathcal{D}^{\leq b}$	上同调振幅落在 $[a, b]$ 的对象	1.3.12	28
$\mathcal{D}^b$	关于给定 t -结构有界的对象所成范畴	1.3.12	28
$DF_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}),$ $DF_{\mathcal{D}^b}(\mathcal{A})$	分次对象分别属于 $\mathcal{D}$ 、 $\mathcal{D}^b$ 的有限滤过复形所成范畴	3.1.5	78
$D(X, \mathcal{O})$	X 上左 $\mathcal{O}$ -模层的导出范畴	1.4.1	38
$D_{\mathcal{S}}(X, \mathcal{O})$	对分层 $\mathcal{S}$ 可构造的导出范畴	2.1.13	58
$D_c(X, \mathcal{O})$	可构造导出范畴	2.1.13	58
$D_{\mathcal{S}, L}(X, \mathcal{O})$	上同调层沿 $\mathcal{S}$ 局部常值且茎属 L 的子范畴	2.1.10	57
$DF(\mathcal{A}), DF^2(\mathcal{A})$	单滤过与双滤过导出范畴	3.1.1	75
$D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$	有界可构造 ℓ -进导出范畴	2.2.17	71
p	权重；作左上标时表示相应 t -结构的截断或上同调函子	2.1.1	53
p^*	与 p 对偶的权重	2.1.16	60
$p_{\mathcal{S}}$	分层 $\mathcal{S}$ 上的权重函数	2.2.1	63
${}^p\tau, {}^pH^i$	相对于权重 t -结构的截断函子与上同调函子	1.3.17	31
$\tau_{\geq a}, \tau_{\leq b}$	一般 t -结构的截断函子	1.3.3	23
$\tau_{[a,b]}$	区间截断函子	1.3.5	24
F_{τ}, U_{τ}	粘合情形中闭部与开部的截断函子	1.4.13	45
D	Verdier 对偶函子	1.4.14	47
$F[n]$	滤过 F 的平移	3.1.8	80
G	从滤过导出范畴到复形范畴的函子	3.1.7	79
H°	与 t -结构相伴的次数零上同调函子	1.3.6	25
Hom_{α}	沿覆盖筛 α 局部化的态射集	3.2.5	89

符号	含义	原书条目	页码
$j_!$	中间扩张函子	1.4.14.1、 1.4.22、 2.1.7	47、 50、 55
$\mathcal{M}(X, \mathcal{O})$	X 上左 $\mathcal{O}$ -模层的阿贝尔范畴	1.4.1	38
n, n^*, n^+	整系数下的自然 t -结构、其对偶及挠理论给出的 t -结构	3.3.1、 3.3.2	102
real	从心的有界导出范畴到原三角范畴的实现函子	3.1.9、 3.1.10	82
$\text{tot } A$	双复形或多复形 A 的总复形	3.2.7	90
$\delta(F, G)$	两个滤过 F, G 所定义的对角滤过	3.1.2	75
Δ, Δ^+	单纯范畴及增广单纯范畴	3.2.6	90
$\boxtimes$	外张量积	4.2.7	115

附录

本附录分别给出邻近圈、消失圈函子和 Fourier 变换函子之 t -正合性的短证；前者由 V. Drinfeld 给出，后者由 D. Gaitsgory 给出。原始证明分别归于 Gabber（见 [Ill94], §§4.5–4.6）和 Katz–Laumon（见 [KL85], §2.1.3; [Lau87], §1.3.2.3）。

以下 ℓ 为素数， $\Lambda \supset \mathbb{Z}/\ell^n$ 为有限交换系数环，所论概形均定义在 $\mathbb{Z}[1/\ell]$ 上。

A

设 S 是严格 Hensel 踪， $f: X \rightarrow S$ 是有限型 S -概形。记 s, η 分别为 S 的闭点和泛点，

$$i: X_s \hookrightarrow X, \quad j: X_\eta \hookrightarrow X$$

为闭纤维和泛纤维的嵌入。取 η 上的可分代数几何点 $\bar{\eta}/\eta$ ，置

$$G := \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta), \quad \rho: X_{\bar{\eta}} \longrightarrow X_\eta.$$

对 $F \in D_c^b(X_\eta, \Lambda)$ ，邻近圈复形为

$$\psi(F) := i^* j_* \rho_* \rho^* F;$$

对 $G_0 \in D_c^b(X, \Lambda)$ ，消失圈复形记为 $\phi(G_0)$ （见 SGA 7 XIII）。存在典范好三角

$$i^* G_0 \longrightarrow \psi(j^* G_0) \longrightarrow \phi(G_0) \longrightarrow,$$

且由 SGA 4₂ 《有限性定理》定理 3.2，

$$\psi(F), \phi(G_0) \in D_c^b(X_s, \Lambda).$$

复形 $\psi(F)$ 、 $\phi(G_0)$ 自然带有 G -等变结构。换言之，它们是 $D(X_s \times BG, \Lambda)$ 中的对象经遗忘等变结构函子所得；这里仍以同一符号表示这些对象，而遗忘函子是由 $X_s \rightarrow X_s \times BG$ 的逆像给出的。 $X_s \times BG$ 是 X_s 上带 G 的连续作用的平展层所成的拓扑斯。¹⁴⁴ 它是各 $X_s \times BG_\alpha$ 的投射 2-极限，其中 G_α 遍历 G 的有限离散商。包含 $\psi(F)$ 与 $\phi(G_0)$ 的有界可构造等变复形全子范畴

$$D_c^b(X_s \times BG, \Lambda)$$

¹⁴⁴准确地说，SGA 7 XIII, §2.1 的邻近圈函子为 $R\Psi_\eta: D^+(X_\eta, \Lambda) \rightarrow D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda)$ ；在这里严格 Hensel 的情形下， $X_s \times_s \eta = X_s \times BG$ 。

则是诸 $D_c^b(X_s \times BG_\alpha, \Lambda)$ 的归纳 2-极限；因而其中任一对象对应的 G -作用都在某个开子群上平凡。

再假设 S 本质上为域 k 上的有限型概形，即它是某个有限型 k -概形的严格局部化。我们在 $D_c^b(X, \Lambda)$ 等范畴上采用由有限型 k -概形情形取极限所得的 t -结构 $[p_{1/2}]$ ；也就是说，它是 [Gab04] 中歳度函数

$$x \longmapsto -\operatorname{trdeg}(k(x)/k)$$

所定义的 t -结构在 D_c^b 上的限制。由此在 $D_c^b(X_s \times BG, \Lambda)$ 上得到一个 t -结构，其心是相应各心的归纳 2-极限（可用局部化确定，见 3.2）。因此，这个心就是带 G -作用、且该作用在某个开子群上平凡的 X_s 上歳层范畴。

以下 $R\Gamma(G, -)$ 表示

$$X \times BG \longrightarrow X, \quad X_s \times BG \longrightarrow X_s$$

的全直像。群 G 是 $\mathbb{Z}_\ell(1)$ 被一个阶与 ℓ 互素的投射有限群 Q 扩张所得的群¹⁴⁵。若 γ 生成 G/Q ，则在等变复形上，

$$R\Gamma(G, -) : D^+(X_s \times BG, \Lambda) \longrightarrow D^+(X_s, \Lambda)$$

由

$$K \longmapsto \operatorname{Cone}(K^Q \xrightarrow{1-\gamma} K^Q)[-1]$$

表示，并把 D_c^b 映入 D_c^b 。对 $K \in \operatorname{Perv}(X_s \times BG, \Lambda)$ ，置

$$H^i(G, K) := {}^p H^i R\Gamma(G, K) \in \operatorname{Perv}(X_s, \Lambda).$$

于是

$$H^0(G, K) = K^G, \quad H^1(G, K) = K_G(-1), \quad H^i(G, K) = 0 \quad (i \neq 0, 1).$$

命题.

- (i) 若 F 是歳层，则 $\psi(F)[-1]$ 是歳层；
- (ii) 若 G_0 是歳层，则 $\phi(G_0)[-1]$ 是歳层。

证明. (i) 可设 $\psi(F) \neq 0$ 。记其歳上同调振幅为 $[a, b]$ ，即

$${}^p H^i \psi(F) = 0 \quad (i \notin [a, b]), \quad {}^p H^a \psi(F), {}^p H^b \psi(F) \neq 0.$$

须证 $a = b = -1$ 。

由有限离散商的相应事实取极限，得到同构

$$F \xrightarrow{\sim} R\Gamma(G, \rho_* \rho^* F),$$

¹⁴⁵译者注：即 Q 是一个每个有限连续商的阶均与 ℓ 互素的投射有限群。

从而

$$i^*j_*F = R\Gamma(G, \psi(F)).$$

$\psi(F)$ 的崑典范滤过给出收敛到 ${}^pH^{a+b}i^*j_*F$ 的谱序列, 其第一项为

$$E_1^{a,b} = H^{2a+b}(G, {}^pH^{-a}\psi(F)).$$

由于 $H^i(G, -)$ 只可能在 $i = 0, 1$ 时非零, 该谱序列在 E_1 退化; i^*j_*F 的崑上同调振幅包含于 $[a, b+1]$, 并且

$${}^pH^a i^*j_*F = ({}^pH^a \psi(F))^G, \quad {}^pH^{b+1} i^*j_*F = ({}^pH^b \psi(F))_G(-1). \quad (*)$$

因此, 只要 G 在 ${}^pH^a \psi(F)$ 与 ${}^pH^b \psi(F)$ 上作用平凡, i^*j_*F 的崑上同调振幅便恰为 $[a, b+1]$ 。

因 j 仿射, $j_!F$ 与 j_*F 都是崑层, 故

$$i^*j_*F = i^* \text{Cone}(j_!F \longrightarrow j_*F)$$

的崑上同调振幅包含于 $[-1, 0]$ 。结合上式, 在 G 对 $\psi(F)$ 作用平凡时即得所求。

一般情形可经基变换归约到上述情形。设 G 在 $\psi(F)$ 上的作用在开子群 $G' \subset G$ 上平凡。令 S'/S 为 S 在 $\eta' := \bar{\eta}/G'$ 中的整闭包; S' 的剩余域可能是 S 的剩余域的非平凡纯不可分扩张。把 X/S 换成

$$X'/S' := X \times_S S'/S',$$

并把 F 换成它在 $X_{\eta'}$ 上的逆像 F' 。直接检验可知, $\psi(F)$ 的逆像同构于 $\psi(F')$, 而 G' 在后者上的作用平凡, 故结论成立。

(ii) 通过剥离, 只须处理 G_0 不可约的情形。若 G_0 支撑在 X_s 上, 结论显然; 否则可设

$$G_0 = j_{!*}F, \quad F := j^*G_0,$$

即 G_0 是崑层态射 $j_!F \rightarrow j_*F$ 的像。于是

$$i_*i^*G_0[-1] = \text{Cone}(j_!F \longrightarrow G_0)[-1]$$

是崑层, 而

$$\text{Cone}(G_0 \longrightarrow j_*F) = \text{Cone}(i_*i^*G_0 \longrightarrow i_*i^*j_*F)$$

也是崑层。因此, 态射 $i^*G_0 \rightarrow i^*j_*F$ 可等同于崑截断态射

$$({}^pH^{-1}i^*j_*F)[1] \longrightarrow i^*j_*F.$$

由 (i) 与 (*),

$$\begin{aligned} \phi(G_0)[-1] &= \text{Cone}({}^pH^{-1}i^*j_*F \longrightarrow {}^pH^{-1}\psi(F)) \\ &= \text{Cone}(({}^pH^{-1}\psi(F))^G \longrightarrow {}^pH^{-1}\psi(F)). \end{aligned}$$

末一箭头是崑层间显然的嵌入, 故

$$\phi(G_0)[-1] = \frac{{}^pH^{-1}\psi(F)}{({}^pH^{-1}\psi(F))^G}$$

是崑层。 □

注记.

- (i) 上述论证事实上适用于任意严格 Hensel 踪 S 。此时须在 $D_c^b(X, \Lambda)$ 上采用与维数函数

$$\delta_X(x) = \text{trdeg}(k(x)/k(f(x))) + \delta_S(f(x)), \quad \delta_S(s) = 0, \quad \delta_S(\eta) = 1$$

对应的崴 t -结构 $[p_{1/2}]$; ¹⁴⁶ 此时 $j_!$ 、 j_* 均 t -正合。更一般地, 若 Noether 概形 X 带有平展维数函数, 并且 X 拟优, 或为某个维数不超过 1 的 Noether 概形上的有限型概形, 则可在 $D_c^b(X, \Lambda)$ 上定义崴 t -结构 $[p_{1/2}]$; 对仿射开嵌入, $j_!$ 、 j_* 均 t -正合。这是 Gabber 的定理, 见 [Ill03], §2.4; [PS14], §1.1.2。

- (ii) 从挠系数情形可以推出 $\mathbb{Z}_\ell$ 系数下 $\psi[-1]$ 、 $\phi[-1]$ (以及 $j_!$ 、 j_*) 对 $[p_{1/2}]$ 和 $[p_{1+}/2]$ 都 t -正合, 继而推出 $\mathbb{Q}_\ell$ 系数情形。对 $[p_{1/2}]$, 所需一般事实如下:

(a) 适当概形 X 上的 $\mathbb{Z}_\ell$ -崴层范畴是 Noether 的, 故每个崴层都是一个无挠崴层被某个 ℓ^n 零化的崴层扩张所得;

(b) $K \in D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$ 是无挠崴层, 当且仅当 $K \otimes \mathbb{Z}/\ell \in D_c^b(X, \mathbb{Z}/\ell)$ 是崴层;

(c) 函子

$$D_c^b(X, \mathbb{Z}/\ell^n) \longrightarrow D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)$$

(把 $\mathbb{Z}/\ell^n$ -层看成 $\mathbb{Z}_\ell$ -层; 可采用 [BS15]、[Eke90] 或 [GL17] 的形式体系) 给出范畴等价

$$\text{Perv}(X, \mathbb{Z}/\ell^n) \xrightarrow{\sim} \text{Perv}(X, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{被 } \ell^n \text{ 零化}}.$$

- (iii) 对 G 的每个有限离散商 G_α , 考虑 G_α -覆盖

$$\rho_\alpha : X_{\eta_\alpha} \longrightarrow X_\eta, \quad \eta_\alpha := \bar{\eta} / \ker(G \rightarrow G_\alpha).$$

诸 G_α -等变复形

$$\psi_\alpha(F) = i^* j_* \rho_{\alpha*} \rho_\alpha^* F$$

定义 $D_c^b(X_s \times BG, \Lambda)$ 的一个 ind-对象。该 ind-对象本质恒定, 其值为 $\psi(F)$ (按 SGA 4 I, §8.4.4 的意义)。特别地, 当 α 充分大时, $\psi(F)$ 自然是 $\psi_\alpha(F)$ 的直和因子。

B

设基域 k 含有限域 $\mathbb{F}_q$, S 是有限型 k -概形, E/S 是秩为 n 的向量丛, $E^\vee$ 是其对偶。记

$$p^\vee, p : E^\vee \times_S E \longrightarrow E^\vee, E$$

为投影,

$$\langle \ , \ \rangle : E^\vee \times_S E \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$$

¹⁴⁶这一 t -结构是 [Gab04] 中由崴度函数 $-\delta_X$ 定义的 t -结构在 D_c^b 上的限制。若 S 是正规有限型 k -概形在某个不可约除子 Y 的泛点处的严格局部化, 则它与前文采用的 t -结构相差 $\dim Y$ 次平移。

为配对。取加性特征 $\psi: \mathbb{F}_q \rightarrow \Lambda^\times$ ，要求它在 Λ 的每个连通分支（或剩余域）上都非平凡；记 $\mathcal{L}_\psi$ 为 $\mathbb{A}_k^1$ 上相应的 Artin–Schreier 层。Fourier 变换

$$\mathcal{F}_\psi: D_c^b(E, \Lambda) \longrightarrow D_c^b(E^\vee, \Lambda)$$

定义为

$$\mathcal{F}_\psi(F) := p_!^\vee(\langle, \rangle^* \mathcal{L}_\psi \otimes p^* F)[n].$$

命题. $\mathcal{F}_\psi$ 是 t -正合的范畴等价。

证明. 我们证明 $\mathcal{F}_\psi$ 是范畴等价，且它和它的逆函子均左 t -正合；由于 $\mathcal{F}_\psi$ 是其逆函子的左伴随，这也推出它右 t -正合。

$\mathcal{F}_\psi$ 是下列函子的复合：

$$p^*[n], \quad \langle, \rangle^* \mathcal{L}_\psi \otimes -, \quad p_!^\vee$$

其中前两个函子 t -正合，末一函子由 Artin 定理左 t -正合；故 $\mathcal{F}_\psi$ 左 t -正合。其余断言归结为下列熟知引理（见 [Lau87], §1.2.2.1）。□

考虑 Fourier 变换

$$\mathcal{F}_{\psi^{-1}}: D_c^b(E^\vee, \Lambda) \longrightarrow D_c^b(E, \Lambda).$$

引理. 存在自然同构

$$\mathcal{F}_{\psi^{-1}} \mathcal{F}_\psi(F) \xrightarrow{\sim} F(-n).$$

证明. 两个 Fourier 变换分别由核

$$\langle, \rangle^* \mathcal{L}_\psi[n] \in D_c^b(E^\vee \times_S E, \Lambda), \quad \langle, \rangle^* \mathcal{L}_{\psi^{-1}}[n] \in D_c^b(E \times_S E^\vee, \Lambda)$$

定义，故复合 $\mathcal{F}_{\psi^{-1}} \mathcal{F}_\psi$ 由复合核

$$K \in D_c^b(E \times_S E, \Lambda)$$

定义。¹⁴⁷ 须给出自然等同

$$K \xrightarrow{\sim} \Delta_* \Lambda_E(-n),$$

其中 $\Delta: E \hookrightarrow E \times_S E$ 是对角嵌入。

K 在对角线外消失。事实上，对几何点 $s \in S$ 和 $(e, e') \in E_s \times E_s$ ，由基变换，纤维 $K_{(e, e')}$ 等于

$$R\Gamma_c(E_s^\vee, \langle e - e', - \rangle^* \mathcal{L}_\psi)[2n].$$

若 $e \neq e'$ ，它又等于

$$R\Gamma_c(E_s^\vee, \langle e - e', - \rangle^! \mathcal{L}_\psi)(1)[2] = R\Gamma_c(\mathbb{A}_s^1, \mathcal{L}_\psi \otimes \langle e - e', - \rangle^! \Lambda_{E_s^\vee})(1 - n)[2],$$

¹⁴⁷ 若 X, Y 是分离有限型 S -概形，则 $D_c^b(Y \times_S X, \Lambda)$ 中任一有限 Tor 维对象 K 都定义函子 $D_c^b(X, \Lambda) \rightarrow D_c^b(Y, \Lambda)$ ， $F \mapsto K(F) := \mathrm{pr}_{Y!}(K \otimes \mathrm{pr}_X^* F)$ ，称为由核 K 定义的函子。若 $L \in D_c^b(Z \times_S Y, \Lambda)$ 是另一核，则复合函子由复合核 $L * K := p_{ZX!}(p_{ZY}^* L \otimes p_{YX}^* K) \in D_c^b(Z \times_S X)$ 定义；这里 $p_{YX}: Z \times_S Y \times_S X \rightarrow Y \times_S X$ 等为投影。这是分析中核的复合在层论中的对应物。

而 $\langle e - e', - \rangle_! \Lambda_{E_s^\vee}$ 是常层，故该式为零。再由基变换，

$$\Delta^* K = p_! \Lambda_{E \times_S E^\vee}[2n] = p_! p^! \Lambda_E(-n) = \Lambda_E(-n).$$

结论得证。 □

注记. 结论在 ℓ -进形式体系中仍成立：系数可取 $\mathcal{O}_E$ 或 E ，其中 $E/\mathbb{Q}_\ell$ 是含 μ_p 的有限扩张， $p = \text{char } k$ 。可重复上述论证，或用 A 部分注记 (ii)。在混合 $\mathbb{Q}_\ell$ 情形， $\mathcal{F}_\psi$ 使权增加 n ：事实上，若崱层 F 纯权 w ，则由 Weil II， $\mathcal{F}_\psi(F)$ 的权不超过 $n + w$ ；再由引理可知它恰为 $n + w$ 。

勘误与补遗

以下页码均指原书页脚所印页码。

1. 第 7 页 (本译本为 1 页) 倒数第 15 行: “normal (即各链环连通)” 应改为 “余维不小于 2 的单形之链环连通”。
2. 第 8 页 (本译本为 2 页) 第 6 行: *en terme* 应为 *en termes*。
3. 第 10 页 (本译本为 3 页) 第 18 行: 崱层的另一来源是 $\mathcal{D}$ -模理论。由 [Kas75] 可知, 复流形上和乐模的平移解复形与平移 de Rham 复形均为崱层 (这里采用 [KS90] 定义 10.3.1 的意义), 且二者互为对偶。

4. 第 19–20 页 (本译本为 11 页), 1.1.4:

倒数第 5、4 行: 将 *foncteurs contravariants exacts à gauche* 改为 *foncteurs additifs contravariants exacts à gauche*。

关于正合范畴的讨论尚可作若干补充; 特别是第 20 页第 4–5 行的条件 (b) 表述不当, Gabber 给出了如下反例。令 $\mathcal{A}$ 为挠部分被 2 零化的有限生成交换群所成的范畴 (即形如 $\mathbb{Z}^n \oplus (\mathbb{Z}/2)^m$ 的群), 并约定序列

$$(*) \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} P \longrightarrow 0$$

属于 $\mathcal{E}$, 当且仅当它在交换群范畴中正合。于是可容许满态射恰为满同态, 它们给出一个 Grothendieck 预拓扑, 且 (b) 成立; 但 $\mathcal{A}$ 并非正合范畴, 因为两个可容许单态射的复合

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$$

不是可容许单态射。因此 Gabber 建议改为假设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})^\sim$ 是阿贝尔范畴、 $A \mapsto h_A$ 有定义 (即对每个正合序列 $(*)$, j 是 i 的余核), 并再要求 $A \mapsto h_A$ 的本质像对扩张封闭。还须注意: (a) 中的 F 应为加性函子; “ $F(\mathcal{A})$ 对扩张封闭” 一语应指其本质像; (b) 中 $A \mapsto h_A$ 全忠实只是 Yoneda 引理, 但仍须要求 $h_A \in (\mathcal{A}, \mathcal{E})^\sim$ 。

要使 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})^\sim$ 成为阿贝尔范畴, 只需假设: 对 $\mathcal{E}$ 中每个序列 $(*)$, i 是 j 的核 (于是 $F \in (\mathcal{A}, \mathcal{E})^\sim$ 的条件变为: 对每个 $(*) \in \mathcal{E}$, 映射

$$F(P) \xrightarrow{\sim} \ker(F(N) \rightrightarrows F(N \times_P N))$$

为同构); 并且对每个可容许满态射 $N \rightarrow P$ 及态射 $Q \rightarrow P$, 纤维积 $N \times_P Q$ 可表示, 而 $N \times_P Q \rightarrow Q$ 同构于一个可容许满态射。

Quillen 所断言的嵌入 $\mathcal{A} \hookrightarrow (\mathcal{A}, \mathcal{E})^\sim$ 见 [Lau83] 的证明。此外还有通常的大小问题：若以集合与类为范畴论基础，而 $\mathcal{A}$ 不是小范畴，便不能构造函数子范畴 $\mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Ab})$ 。

5. 第 23 页（本译本为 16 页）倒数第 1 行：TR, 2 应为 TR, 3。
6. 第 27 页（本译本为 21 页）倒数第 2 行：断言“反之……”还需假设 $0 \in \mathcal{C}$ ；更准确地说， $\mathcal{C}$ 中含有某个零对象。反例：取 $\mathcal{D} = D^b(k)$ (k 为域)，而 $\mathcal{C}$ 为非零向量空间所成的范畴。
7. 第 31 页（本译本为 25 页）顶部图下第 3 行： $\tau_{\leq a}$ 应为 $\tau_{\geq a}$ 。
8. 第 31 页（本译本为 25 页）倒数第 11 行：1.3.2 应为 1.3.2 (i)。
9. 第 32 页（本译本为 26 页）倒数第 7 行：在 $(U, Z \dots)$ 中的 Z 后补逗号。
10. 第 33 页（本译本为 27 页）第 14 行： a 应为 $\dot{a}$ 。
11. 第 34 页（本译本为 28 页）第 13–16 行：若 I 是空区间（Bourbaki 允许这种情形），原定义会使 $D^{b,I}$ 成为空子范畴；更自然的约定是令它为零对象所成的范畴。于是对任意 I 都有

$$D^{b,I} = \{A \in D^b \mid H^j A = 0, \text{ 若 } j \notin I\}.$$

12. 第 35 页（本译本为 30 页）倒数第 5、4 行：将 *coreprésente* 改为 *représente*。
13. 第 37 页（本译本为 32 页）第 8 行末： T_1 改为 ${}^p T_1$ 。
14. 第 37 页（本译本为 32 页）倒数第 13 行： $\tau_{\leq 0} T^* B$ 应为 $\tau_{\geq 0} T^* B$ 。
15. 第 40 页（本译本为 37 页）倒数第 3 行：删去“i.e.”前的 i 。
16. 第 42 页（本译本为 38 页）第 1、2 行：将 Walbroeck 改为 Waelbroeck [Wae72]。
17. 第 44 页（本译本为 40 页）1.4.3 第 3 行： j_* 改为 j^* 。
18. 第 44 页（本译本为 40 页）(1.4.3.2) 第 2 行： j^* 改为 j_* 。
19. 第 45 页（本译本为 40 页）第 7 行： j^* 应为 j_* 。
20. 第 46 页（本译本为 41 页）第 9 行： an 改为 en 。
21. 第 53 页（本译本为 50 页）(1.4.21.3) 上方第 2 行：删去 T 。
22. 第 54 页（本译本为 51 页）倒数第 4 行： $i_* H^0 i^* B$ 应为 $i_* H^0 i^* j_* B$ 。
23. 第 57 页（本译本为 55 页）倒数第 1 行： $H^i, {}^p \tau_{\leq 0} K$ 应为 $H^i, {}^p \tau_{\geq 0} K$ 。

24. 第 60 页 (本译本为 58 页) 第 20、21 行: “有限维 R -向量空间的局部常值层”略有滥用; 准确地说, 应为“茎均有限维的局部常值层”。
25. 第 67 页 (本译本为 64 页) 命题 2.2.2 (i): 应为 ${}^p D_c^{\geq 0}$, 上标是小写 p , 不是大写 P 。
26. 第 68 页 (本译本为 65 页) 第 7 行: on 应为 $on a$ 。
27. 第 68 页 (本译本为 65 页) 第 10 行: 中间的 A 应为 $i^* j_* A$ 。
28. 第 69 页 (本译本为 68 页) 2.2.9: “在 X 上我们只考虑平展拓扑”是一种简略说法; 层是相对于平展拓扑而言的, 而局部闭子集仍指 Zariski 拓扑下的局部闭子集。另将 *premier à* 改为 *différent de*。
29. 第 70 页 (本译本为 69 页) 倒数第 3 行: 特别地, 与分层空间的情形 (第 63 页) 相同, 有自对偶崑度函数

$$p_{1/2} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad S \longmapsto -\dim S.$$

30. 第 71 页 (本译本为 69 页) 第 2 行: 这一表述可将由崑度函数构造 t -结构的方法推广到不要求可构造性、也不使用分层的情形; 见 [Gab04]。
31. 第 71 页 (本译本为 69 页) 第 4 行: $<$ 应为 $>$ 。
32. 第 71 页 (本译本为 69 页) 第 5 行: $>$ 应为 $<$ 。
33. 第 73 页 (本译本为 71 页) 第 3 行: 应为 $\widehat{D}_c^b$, 原文漏掉上标 b 。
34. 第 73 页 (本译本为 71 页) 第 7 行: 应为 $\varprojlim^{-1} \mathrm{Hom}^{-1}(K_n, L_n)$, 原文漏掉上标 -1 。
35. 第 79 页 (本译本为 79 页) 3.1.5: 最好假设 $\mathcal{D}$ 是严格全子范畴; 否则, 3.1.5 第 6 行的条件应改为 $\mathrm{Gr}_F^i K$ 属于 $\mathcal{D}$ 的饱和。
36. 第 80 页 (本译本为 81 页) 倒数第 2 行: $(-i)^i$ 应为 $(-1)^i$ 。
37. 第 86 页 (本译本为 89 页) 倒数第 9 行: 定理 3.2.4 说明, 对偶化对象在各种语境 (如凝聚层情形) 下都具有局部性。
38. 第 86 页 (本译本为 89 页) 倒数第 5 行: “唯一”应改为“在唯一同构意义下唯一”。
39. 第 88 页 (本译本为 90 页) 第 10 行: $\mathcal{B}_m$ 应为 B_m 。
40. 第 97 页 (本译本为 100 页) 命题 3.2.20 证明第 2、11 行: 记号 ${}^p D^{+, \leq 0}$ 最好像 §2.1 那样在 $+$ 后加逗号。同样的修改也适用于引理 3.2.21 及其证明。

41. 第 98 页 (本译本为 101 页) 第 10 行: 应为 ${}^pD^{+, \leq 0}(X, \mathcal{O})$ 、 ${}^pD^{> 0}(X, \mathcal{O})$, 补上左上标 p 。
42. 第 99 页 (本译本为 102 页) 第 6 行: $R\mathrm{Hom}$ 应为内部 Hom , 即 $R\mathrm{Hom}$ 。
43. 第 99 页 (本译本为 103 页) 倒数第 13 行: “挠” 的定义不准确。应要求局部存在 $n \neq 0$, 使乘以 n 的自同态为零。若再假设每个片层中只有有限多个连通分支, 则无需 “局部” 二字。
44. 第 100 页 (本译本为 104 页) 第 12 行: 关于 ℓ -进形式体系, 可参见 [Eke90]、[BS15]; 采用 ∞ -范畴的较新论述见 [GL17, chap. II]。
45. 第 101 页 (本译本为 105 页) 第 5 行: (2.2.12) 应为 (2.2.18)。
46. 第 101 页 (本译本为 105 页) 第 8 行: 2.2.12 应为 2.2.14。
47. 第 101 页 (本译本为 105 页) 第 15 行: 原文说只考虑系数 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, 但多处 (4.1.13、4.3.1、4.3.2、4.3.3 以及 (4.2.5.1) 上一行) 实际使用的是 $\mathbb{Q}_\ell$ 系数。
48. 第 101 页 (本译本为 105 页) 倒数第 8 行: $[p_{1/2}+]$ 应为 $[p_{1/2}^+]$ 。
49. 第 101 页 (本译本为 105 页) 倒数第 6 行: $[p_{1/2}+]$ 应为 $[p_{1/2}^+]^-$ 。
50. 第 102 页 (本译本为 106 页) 第 1 行: “参见 2.2.11” 应为 “参见 2.2.11 与 2.2.12”。
51. 第 103 页 (本译本为 107 页) 倒数第 13 行: (4.1.7) 改为 (4.1.1)。
52. 第 114 页 (本译本为 118 页) 倒数第 15 行: 应为 ${}^pD_c^{\leq 0}$, 而不是 ${}^pD_c^{\leq 0}$ 。
53. 第 119 页 (本译本为 123 页) 第 4 行: $\tilde{p}r$ 应为 $\tilde{p}r_*$ 。
54. 第 120 页 (本译本为 124 页) 推论 4.5.2 的证明: 句末漏了句号。
55. 第 120 页 (本译本为 124 页) 推论 4.5.4 第 2 行: 应为 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, 不是 $\mathbb{Q}_\ell$ 。
56. 第 120 页 (本译本为 125 页) 推论 4.5.5: 应假设 x 是闭点; 否则无法找到第 121 页开头两行所用的 f 。
57. 第 122 页 (本译本为 127 页) 第 3 行说 “我们只考虑有限型分离概形”, 但 5.4.8 中还会考虑严格 Hensel 化。
58. 第 123 页 (本译本为 128 页) 公式 (5.1.2.2): $R\Gamma \cdot Ra_*$ 应为 $R\Gamma Ra_*$ 。
59. 第 123 页 (本译本为 129 页) 倒数第 6 行: $\mathbb{Z}$ 的投射有限完备化通常记作 $\widehat{\mathbb{Z}}$, 不记作 $\widetilde{\mathbb{Z}}$ 。
60. 第 125 页 (本译本为 130 页) 引理 5.1.3 (c): 漏写条件 $F \in P(Y_0)$ 。

61. 第 125 页 (本译本为 130 页) 引理 5.1.3 与注记 5.1.4: 最好假设 $P(Y_0)$ 是严格全子范畴。
62. 第 128 页 (本译本为 134 页) 5.1.13 第 4 行: $D_{\leq w}^b, D_{\leq w'}^b$ 应为 $D_{\leq w}^b \times D_{\leq w'}^b$ 。
63. 第 128 页 (本译本为 134 页) 倒数第 5 行: “由 (i) 可知” 应为 “由 (i)、(ii) 可知”。
64. 第 131 页 (本译本为 137 页) 倒数第 5 行: W^{w-1} 应为 W_{w-1} 。
65. 第 131 页 (本译本为 137 页) 倒数第 4 行: $U(X)$ 应为 $U \rightarrow X$ 。
66. 第 132 页 (本译本为 138 页) 第 5 行: $p_{\varphi_*}|F_0$ 应为 $p_{\varphi_*}F_0$ 。
67. 第 133 页 (本译本为 139 页) 第一个图: $\tilde{\text{pr}}$ 应为 pr 。
68. 第 133 页 (本译本为 139 页) 第一个图下第 3 行: $H_0 \sim A_0^{n-1}$ 应为 $H_0 = A_0^{n-1}$ 。
69. 第 134 页 (本译本为 140 页) 第 3 行: (1.3.17 (iii)) 应为 (1.3.17 (iii))。
70. 第 136 页 (本译本为 141 页) 图下第 4 行: V_0 应为 v_0 。
71. 第 136 页 (本译本为 142 页) 倒数第 10 行: (5.1.8) 应为 (5.1.8))。
72. 第 141 页 (本译本为 146 页) 第 12 行: $P_{\tau_{>n}}$ 应为 $p_{\tau_{>n}}$ 。
73. 第 142 页 (本译本为 148 页) 倒数第 12 行: 5.3.7 应为 5.3.8。
74. 第 143 页 (本译本为 148 页) 第 11 行: 右括号后补逗号。
75. 第 143 页 (本译本为 148 页) 第 16 行: $K = j_{!*}L[d][n]$ 应为 $K = (j_{!*}L[d])[n]$ 。
76. 第 146 页 (本译本为 151 页) 倒数第 11 行: $\tau_{\leq d-1}$ 应为 $\tau_{\geq d-1}$ 。
77. 第 148 页 (本译本为 153 页) 第 5 行: 在 6.1 的讨论中, 不必只从 $\mathbb{F}$ 转到 $\mathbb{C}$; 也可转到任意特征不等于 ℓ 的代数闭域 k , 并对 k 上代数簇的几何来源半单 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -崱层得到 6.2.5、6.2.8、6.2.10 的对应结论。
78. 第 149 页 (本译本为 154 页) 第 11 行: Brian Conrad 于 2003 年指出, 由 (A') 取极限推出 (A'') 时, 需要用到各片层局部可缩。Gabber 进一步指出, 在

$$Z(\mathbb{C}) \xrightarrow{i} X(\mathbb{C}) \xleftarrow{j} U(\mathbb{C})$$

的情形还需有

$$i^*j_*F = \varprojlim_n i^*j_*(F/\ell^n F),$$

其中 F 是 $U(\mathbb{C})$ 上的可构造 $\mathbb{Z}_\ell$ -层, U 是若干片层的开并, 而 Z 是其补集。若分层空间满足适当条件, 例如来自局部有限三角剖分, 则此式成立。

79. 第 153 页 (本译本为 157 页) 第 14 行: *nombre* 应为 *nombres*。
80. 第 156 页 (本译本为 160 页) 倒数第 14 行: 还应说明, 对每个 $T \in \mathcal{T}_S$, $\mathcal{L}_S(T)$ 是 T 上光滑 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -层同构类的有限族, 且这些层在几何纤维上不可约。
81. 第 157 页 (本译本为 161 页) 第 7 行: 标有 i^* 的左向箭头应改为右向箭头。
82. 第 157 页 (本译本为 161 页) 第 8 行: 离散赋值环并非必要; 对介于 A 与 $\mathbb{C}$ 之间的任意严格 Hensel 局部环 V , 都有这样的等价。
83. 第 157 页 (本译本为 161 页) 第 11 行: 由假设, 对以 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 为系数环的 Ext 层, $H^p(-, \mathcal{E}xt^q(F, G))$ 有比较同构。不能由此直接推出以 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ 为系数环的 Ext 层也有这种比较同构; 但缩小 S 后可以做到, 或者使用标准谱序列, 推出以 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ 为系数的整体 $\mathrm{Ext}^p(F, G)$ 有比较同构。
84. 第 159 页 (本译本为 163 页) 第 8 行: “对 $H^1(-, \mathbb{Z}/\ell)$ ” 应为 “对 $H^1(-, \mathbb{Z}/\ell)$ 与 $H^2(-, \mathbb{Z}/\ell)$ ”。
85. 第 160 页 (本译本为 164 页) 倒数第 14 行: 参见 [Ham95]。
86. 第 160 页 (本译本为 165 页) 倒数第 4 行: “可下降到 S ” 应为 “可下降到某个适当的 S ”。
87. 第 161 页 (本译本为 165 页) 第 1 行: “因而在 S 上仍成立” 应为 “因而在从 S 中删去 ℓ 为零之处后仍成立”。
88. 第 161 页 (本译本为 165 页) 第 7 行: 这里的谱序列来自截断单纯对象, 具体见 [MO15] §4.1.2。
89. 第 161 页 (本译本为 165 页) 第 15 行: Y 应为 $Y(\mathbb{C})$ 。
90. 第 162 页 (本译本为 167 页) 倒数第 4 行: “有限型概形” 应为 “有限型分离概形”。
91. 第 162 页 (本译本为 167 页) 倒数第 3 行: “若它属于满足……的最小集合” 应改为: “若 (X, F) 属于上述有序偶所成的、在同构下稳定并满足……的最小类”。
92. 第 163 页 (本译本为 167 页) 第 7 行: “由此得到的稳定性见……” 应改为: “特别地, 它对中间扩张与对偶稳定。”
93. 第 163 页 (本译本为 167 页) 第 18 行: $\pi_*\mathbb{C}$ 应为 $\pi_*\underline{\mathbb{C}}$ 。
94. 第 163 页 (本译本为 168 页) 倒数第 13 行: 分解定理在有限域上有更精确的版本: 若

$$f: X_0 \longrightarrow Y_0$$

真且 $K \in D_c^b(X_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是纯崑层, 则 Rf_*K 是纯崑对象之平移的有限直和; 而 5.4.5 的分解在 Y_0 上一般并不成立。这个结论早已为人所知, 其证明用到向射影情形的约化、Hard Lefschetz (5.4.10) 以及导出范畴中的有关分解; 但它直到较近才见于文献, 也以更一般的形式出现, 见 [dC15] 命题 2.1.1 与 [SZ16] 推论 3.2.5。

95. 第 164 页 (本译本为 168 页) 第 10 行: $R\mathrm{Hom}$ 应为内部 Hom , 即 $R\underline{\mathrm{Hom}}$ 。
96. 第 164 页 (本译本为 169 页) 倒数第 11 行: $y \in Y$ 应为 $y \in V(\mathbb{C})$ 。
97. 第 164 页 (本译本为 169 页) 倒数第 7 行: $y \in Y$ 应为 $y \in Y(\mathbb{C})$ 。
98. 第 165 页 (本译本为 170 页) 注记 6.2.11: 关于这一问题的进展, 例如可参见 M. Saito [Sai88]、[Sai90], T. Mochizuki [Moc15], 以及 C. Sabbah 的 Bourbaki 报告 [Sab13]。
99. 第 167 页 (本译本为 171 页) 第 14 行 [6]: p. 77–79 应为 p. 77–130。
100. 第 167 页 (本译本为 171 页) 倒数第 4 行 [10]: *Catégories abéliennes* 应为 *Catégories dérivées*。

补充参考文献

- [BS15] B. Bhatt, P. Scholze, The pro-étale topology for schemes, *De la Géométrie algébrique aux formes automorphes (I)* (Une collection d'articles en l'honneur du soixantième anniversaire de Gérard Laumon), *Astérisque* 369 (2015), pp. 99–201.
- [dC15] M. de Cataldo, Proper toric maps over finite fields. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2015, no. 24, pp. 13106–13121.
- [Eke90] T. Ekedahl, On the adic formalism, *The Grothendieck Festschrift*, Vol. II, *Progr. Math.*, 87 (1990), Birkhäuser, pp. 197–218.
- [Gab04] O. Gabber, Notes on some t -structures, *Geometric aspects of Dwork theory*. Vol. II (2004), Walter de Gruyter, pp. 711–734.
- [GL17] D. Gaiitsgory, J. Lurie, Weil's Conjecture for Function Fields I, preprint 2017.
- [Ham95] H. Hamm, Affine varieties and Lefschetz theorems. *Singularity theory* (Trieste, 1991), pp. 248–262, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.
- [Ill94] L. Illusie, Autour du théorème de monodromie locale, *Périodes p -adiques* (Bures-sur-Yvette, 1988), *Astérisque* 223 (1994), pp. 9–57.
- [Ill03] L. Illusie, Perversité et variation, *Manuscripta Math.* 112 (2003), pp. 271–295.
- [Kas75] M. Kashiwara, On the maximally overdetermined system of linear differential equations. I. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 10 (1974/75), pp. 563–579.
- [KS90] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* 292 (1990) Springer-Verlag.
- [KL85] N. Katz, G. Laumon, Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, *Publ. Math. IHÉS* 62 (1985), pp. 361–418.
- [Lau83] G. Laumon, Sur la catégorie dérivée des D -modules filtrés, *Algebraic geometry* (Tokyo/Kyoto, 1982), *Lecture Notes in Math.* 1016 (1983), pp. 151–237.

- [Lau87] G. Laumon, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, Publ. Math. IHÉS 65 (1987), pp. 131–210.
- [MO15] D. Madore, F. Orgogozo, Calculabilité de la cohomologie étale modulo ℓ , Algebra Number Theory 9 (2015), no. 7, pp. 1647–1739.
- [Moc15] T. Mochizuki, Mixed twistor D -modules, Lecture Notes in Mathematics 2125 (2015) Springer.
- [PS14] V. Pilloni, B. Stroh, Théorème de Lefschetz affine, Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents, L. Illusie, Y. Laszlo, F. Orgogozo, éditeurs, Astérisque 363-364 (2014), pp. 293–300.
- [Sab13] C. Sabbah, Théorie de Hodge et correspondance de Hitchin-Kobayashi sauvages (d'après T. Mochizuki), Séminaire Bourbaki 1050, Astérisque 352 (2013), pp. 205–241.
- [Sai88] M. Saito, Modules de Hodge polarisables. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 24 (1988), pp. 849–995.
- [Sai90] M. Saito, Mixed Hodge modules. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990), pp. 221–333.
- [SZ16] S. Sun, W. Zheng, Parity and symmetry in intersection and ordinary cohomology. Algebra Number Theory 10 (2016), No. 2, pp. 235–307.
- [Wae72] L. Waelbroeck, Les quotients de b -espaces. Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle (Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1971). Mém. Soc. Math. France, No. 31–32 (1972), pp. 389–394.

中英法术语对照表

中	英	法
崴层	perverse sheaf	faisceau pervers
崴度	perversity	perversité
自对偶崴度	self-dual perversity	perversité autoduale
相交同调	intersection homology	homologie d'intersection
链环	link	link
和乐模	holonomic module	module holonome
可消去的	effaceable	effaçable
松层	flabby sheaf	faisceau flasque
拓扑斯	topos	topos
景	site	site
平展	étale	étale
投射平展	pro-étale	pro-étale
分层	stratification	stratification
片层	stratum	strate
踪	trait	trait
等奇异	equisingular	équisingulier
剥离	dévissage	dévissage
剥离论证	dévissage	dévissage
可构造	constructible	constructible
可构造导出范畴	constructible derived category	catégorie dérivée constructible
对偶化对象	dualizing object	objet dualisant
Whitney 分层	Whitney stratification	stratification de Whitney
对偶崴度	dual perversity	perversité duale
反环层	opposite ring sheaf	faisceau d'anneaux opposé
野分歧	wild ramification	ramification sauvage
投射 2-极限	projective 2-limit	2-limite projective
中间崴度	middle perversity	perversité intermédiaire
分片线性伪流形	piecewise-linear (PL) pseudomanifold	pseudo-variété PL
定向分片线性伪流形	oriented piecewise-linear (PL) pseudomanifold	pseudo-variété PL orientée
深度条件	depth condition	condition de profondeur
叠	stack	champ
中间扩张	intermediate extension / middle extension	prolongement intermédiaire

中	英	法
延拓	extension	prolongement
扩张 (短正合列)	extension	extension
混合	mixed	mixte
纯的	pure	pur
权	weight	poids
t -结构	t -structure	t -structure
心	heart	cœur
滤过导出范畴	filtered derived category	catégorie dérivée filtrée
双滤过导出范畴	bifiltered derived category	catégorie dérivée bifiltrée
谱对象	spectral object	objet spectral
典范滤过复形	canonically filtered complex	complexe filtré canonique
笨滤过复形	stupidly filtered complex	complexe filtré bête
实现函子	realization functor	foncteur de réalisation
终对象	terminal object	objet final
f -态射	f -morphism	f -morphisme
覆盖筛	covering sieve	crible couvrant
上同调下降理论	cohomological descent theory	théorie de la descente cohomologique
余循环条件	cocycle condition	condition de cocycle
退化映射	degeneracy map	dégénérescence
严格单纯系统	strict simplicial system	système simplicial strict
笛卡尔的	cartesian	cartésien
纤维化	fibered	fibrée
余纤维化	cofibered	cofibrée
截面	section	section
余笛卡尔的	cocartesian	cocartésien
α -映射	α -mapping	α -application
面态射	face morphism	morphisme de face
单位态射	unit	unité de l'adjonction
余单位态射	counit	morphisme d'adjonction
拟同构	quasi-isomorphism	quasi-isomorphisme
非退化链的复形	complex of non-degenerate chains	complexe des chaînes non dégénérées
非退化链的增广复形	augmented complex of non-degenerate chains	complexe augmenté des chaînes non dégénérées
退化链	degenerate chain	chaîne dégénérée
双齐次分量	bihomogeneous component	composante bihomogène
笛卡尔截面	cartesian section	section cartésienne
笛卡尔对象	cartesian object	objet cartésien
局部有限分拆	locally finite partition	partition localement finie
自对偶	self-duality	autodualité
挠	torsion	de torsion
无挠	torsion-free	sans torsion
可除	divisible	divisible
Dedekind 环	Dedekind ring	anneau de Dedekind

中	英	法
邻近圈	nearby cycles	cycles proches
消失圈	vanishing cycles	cycles évanescents
赋值环	valuation ring	anneau de valuation
限制标量	restriction of scalars	restriction des scalaires
扩张标量	extension of scalars	extension des scalaires
诺特的	Noetherian	noethérien / noethérienne
阿廷的	Artinian	artinien / artinienne
光滑层	smooth sheaf	faisceau lisse
点支撑层	punctual sheaf	faisceau ponctuel
反自等价	anti-autoequivalence	anti-autoéquivalence
超上同调	hypercohomology	hypercohomologie
上同调幅度	cohomological amplitude	amplitude cohomologique
外张量积	exterior tensor product	produit tensoriel externe
万有局部凡调性	universal local acyclicity	acyclicité locale universelle
有限长度	finite length	longueur finie
完美闭包	perfect closure	clôture parfaite
单值 (表示或作用)	monodromy	monodromie
Betti 数	Betti number(s)	nombre(s) de Betti
局部凡调	locally acyclic	localement acyclique
余不变量	coinvariants	coinvariants
Euler 示性数	Euler characteristic	caractéristique d'Euler
惯性群	inertia group	groupe d'inertie
野惯性群	wild inertia group	groupe d'inertie sauvage
Swan 导子	Swan conductor	conducteur de Swan
Swan 表示	Swan representation	représentation de Swan
亏格	genus	genre
特征指数	characteristic exponent	exposant caractéristique
逐点纯层	punctually pure sheaf	faisceau ponctuellement pur
混合层	mixed sheaf	faisceau mixte
逐点权	punctual weights	poids ponctuels
权不超过 w	weight at most w	poids au plus w
权不小于 w	weight at least w	poids au moins w
权 w 的纯复形	pure complex of weight w	complexe pur de poids w
三角范畴	triangulated category	catégorie triangulée
平移函子	translation functor	foncteur de translation
好三角	distinguished triangle	triangle distingué
锥	cone	cône
正合范畴	exact category	catégorie exacte
零调	acyclic	acyclique
厚子范畴	thick subcategory	sous-catégorie épaisse
严格全子范畴	strictly full subcategory	sous-catégorie strictement pleine
分式演算	calculus of fractions	calcul de fractions
本质满	essentially surjective	essentiellement surjectif
子商	subquotient	sous-quotient

中	英	法
稳定同伦范畴	stable homotopy category	catégorie homotopique stable
八面体图	octahedral diagram	diagramme de l'octaèdre
上/下帽图	upper/low cap	calotte supérieure/inférieure
反交换	anti-commutative	anticommutatif
可容许	admissible	admissible
对扩张稳定	stable under extensions	stable par extensions
左/右伴随	left/right adjoint	adjoint à gauche/droite
非退化	non-degenerate	non dégénérée
保守的	conservative	conservatif
扩张闭包	extension closure	clôture par extensions
左/右 t -正合	left/right t -exact	t -exact à gauche/droite
诱导 t -结构	induced t -structure	t -structure induite
粘合	gluing	recollement
Tate 扭曲	Tate twist	torsion de Tate
拟有限态射	quasi-finite morphism	morphisme quasi-fini
半单性	semisimplicity	semi-simplicité
不可分解	indecomposable	indécomposable
同型分量	isotypic component(s)	constituant(s) isotypique(s)
局部不变圈定理	local invariant cycle theorem	théorème local des cycles invariants
整体不变圈定理	global invariant cycle theorem	théorème global des cycles invariants
严格 Hensel 化	strict henselization	hensélisé strict
相对丰沛可逆层	relatively ample invertible sheaf	faisceau inversible relativement ample
Gysin 态射	Gysin morphism	morphisme de Gysin
对偶射影空间	dual projective space	espace projectif dual
射影空间丛	projective bundle	fibré projectif
投射有限完备化	profinite completion	complété profini
有限呈示	finite presentation	présentation finie
初等因子	elementary divisor	diviseur élémentaire
拟幺幂	quasi-unipotent	quasi-unipotent(e)
Stein 空间	Stein space	espace de Stein
几何来源的	of geometric origin	d'origine géométrique
可极化 Hodge 结构变分	polarizable variation of Hodge structures	variation de structures de Hodge polarisable