



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

硕士学位论文

微局部层论及其在辛几何中的应用

作者姓名: 张秉宇

指导教师: 阮卫东 研究员

中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别: 理学硕士

学科专业: 基础数学

培养单位: 中国科学院数学与系统科学研究院

2018 年 6 月

Microlocal Sheaf Theory and
its Application in Symplectic Geometry

A thesis submitted to the
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Natural Science
in Fundamental Math

By

Bingyu Zhang

Supervisor: Professor Wei-Dong Ruan

Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese
Academy of Sciences

June, 2018

中国科学院大学
研究生学位论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。

作者签名：

日 期：

中国科学院大学
学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分內容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：

摘 要

本文是微局部层论在辛几何中的应用的一篇读书笔记。旨在介绍微局部层论, 齐次哈密顿同痕和紧恰当拉格朗日子流形的层量子化, 及其如何运用于 Arnold 非异置问题和 Arnold 临近拉格朗日猜想。特别地, 我们证明了齐次哈密顿同痕层量子化的存在性. 用层量子化证明了紧光滑流形余切丛的零截面是非异置的, 给出了横截相交时相交数的下界. 并用层量子化证给出了一个范畴, 可以用作扭结去心余法丛的不变量.

关键词: 微局部层论, 辛几何, 层量子化

Abstract

This paper is a reading notes on application of microlocal sheaf theory in symplectic geometry. Our target is to introduce microlocal sheaf theory, sheaf quantization of homogeneous Hamiltonian isotropy and compact Lagrangian submanifold, and how these could be used in Arnold's non-displaceability problem and Arnold's nearby Lagrangian conjecture. In particular, we show that the existence of sheaf quantization of homogeneous Hamiltonian isotropy. And we deduce from the sheaf quantization that the zero-section of cotangent bundle of a compact smooth manifold is non-displaceable, and give the lower bounded of intersection number when intersection is transversal. Also, we gives a category that can be used to be an invariant of deleted conormal bundle of knots.

Keywords: Microlocal Sheaf Theory, Symplectic Geometry, Sheaf Quantization

目 录

第 1 章 引言	1
第 2 章 微局部层论	5
2.1 奇异支撑	5
2.2 奇异支撑与函子运算	12
2.3 核与层的卷积	17
2.4 层的局部有界导出范畴	22
第 3 章 层的 Morse 理论	25
3.1 1 维的 Morse 引理	25
3.2 Morse 引理的证明及其推论	28
3.3 Morse 不等式	31
第 4 章 微局部层论在辛几何中的应用	33
4.1 辛几何的基本概念	33
4.2 余切丛的齐次辛几何和 Tamarkin 锥技巧	38
4.3 哈密顿同痕的层量子化	45
4.4 紧恰当拉格朗日子流形的层量子化	52
第 5 章 哈密顿同痕的层量子化的存在性	55
5.1 哈密顿同痕的层量子化的唯一性	55
5.2 正规化余测地流的层量子化	60
5.3 层量子化的存在性-水平紧支撑情形	62
5.4 层量子化的存在性	65
参考文献	67
作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果	69
致 谢	71

符号列表

k	一个有整体维数的环, 特别地, 可取 k 为域或者 \mathbb{Z}
$Sh_k(M)$	光滑流形 M 上 k 模层的范畴, 本文皆简称为层
A_M	M 上取值在 k 模 A 的常值层
F^\bullet	M 上层的复形, 本文常常将其简称为层, 亦常常省略右上角的圆点
$\mathcal{H}^i(F^\bullet)$	M 上层的复形 F^\bullet 的第 i 个上同调层 (区别于模的上同调)
$\mathcal{H}om$	层的局部态射函子
\otimes	模或层的张量积
Γ	层的截面函子
	$f : M \rightarrow N$ 是光滑映射
f_*	直接像函子
$f_!$	逆紧直接像函子
f^{-1}	逆像函子
	设 $i : Z \subset M$ 是局部闭子集, F 是 M 上的层.
F_Z	$F_Z = i_! i^{-1} F$, 即 F 在 Z 上的限制的零延拓
$\Gamma_Z F$	层 F 的支撑于 Z 的截面的子层
$D(M)$	层 $Sh_k(M)$ 的导出范畴
$D^b(M)$	层 $Sh_k(M)$ 的有界导出范畴
$D^{lb}(M)$	层 $Sh_k(M)$ 的局部有界导出范畴
	设 $F : Sh_k(M) \rightarrow Sh_k(N)$ 是一个左正合函子.
RF	F 的右导出函子, 特别地有 Rf_* , $f_!$, $R\mathcal{H}om(F^\bullet, -)$
$R^i F$	F 的右导出函子的第 i 个上同调, 亦称为 F 的第 i 个导出函子
$\overset{L}{\otimes}$	模或层的导出张量积
$\overset{L}{\boxtimes}$	乘积流形上层的外张量积
$\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2$	\mathcal{K}_1 和 \mathcal{K}_2 的卷积, 见section 2.3
$\mathcal{K}_1 \circ_I \mathcal{K}_2$	\mathcal{K}_1 和 \mathcal{K}_2 的相对卷积, 见section 2.3
$f^!$	Verdier 对偶
ω_M	光滑流形 M 上的对偶层 $\omega_M = a_M^! k$, $a_M : M \rightarrow \{\text{pt}\}$ 是常值映射

$\omega_{M/N}$	光滑映射 $f : M \rightarrow N$ 的相对对偶层 $\omega_{M/N} = f^!k_N$
\mathcal{K}^{-1}	$\mathcal{K}_s^{-1} = v^{-1}R\mathcal{H}om(\mathcal{K}_s, \omega_M \overset{L}{\boxtimes} k_M)$, \mathcal{K} 是 $M \times M$ 上的层, $v(x, y) = (y, x), x, y \in M$
\mathcal{K}^{-1}	$K^{-1} = (v \times \text{Id}_I)^{-1}R\mathcal{H}om(K, \omega_M \overset{L}{\boxtimes} k_M \overset{L}{\boxtimes} k_I)$, \mathcal{K} 是 $M \times M \times I$ 上的层
$\text{supp}F^\bullet$	层 F^\bullet 的支撑, 即 $\cup_i \text{supp}(\mathcal{H}^i(F^\bullet))$
$SS(F^\bullet)$	层 F^\bullet 的奇异支撑
δ	$M \rightarrow M \times M$ 的对角嵌入
Δ	$M \times M$ 中 M 的对角线, 即 $\delta(M)$
Δ_U	设 $U \subset M$, $\Delta_U = U \times M \cap \Delta$
$\text{Graph}(f)$	光滑映射 $f : M \rightarrow M$ 的图像
0_M	余切丛 T^*M 的零截面 (即代表零截面的映射, 也代表零截面的像)
\dot{T}^*M	M 的去心余切丛, 即 $T^*M \setminus 0_M$
$\pi_M/\dot{\pi}_M$	M 的余切丛/去心余切丛的丛投影
T_S^*M	子流形 $S \subset M$ 的余法丛
\dot{T}_S^*M	子流形 $S \subset M$ 的去心余法丛, 即 $T_S^*M \setminus 0_M$
a	对径映射 $a : T^*M \rightarrow T^*M, (x, p) \mapsto (x, -p)$
S^a	一般集合 $S \subset T^*M$, 在对径映射 a 下的像. 然而本文亦常用其表示部分变量的对径, 见下文
(X, ω)	辛流形
$(X, d\alpha)$	恰当辛流形
\bar{X}	若 (X, ω) 为辛流形, 则 $\bar{X} = (X, -\omega)$
α_M/ω_M	M 的余切丛上的 Liouville 形式/辛形式. 尽管与对偶层有符号混淆, 然而我们并不会让混淆发生
V_H	光滑函数 H 的哈密顿向量场, 我们选取符号约定 $\iota_{V_H}\omega = -dH$
$\text{Graph}(\varphi)$	辛同痕 $\varphi : X \times I \rightarrow X$ 的图像
$T_{\tau>0}^*(M \times \mathbb{R})$	$\{(x, p, t, \tau) \in T^*(M \times \mathbb{R}) : \tau > 0\}$
C	Tamarkin 锥映射: $C : T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R} \rightarrow T^*M, (x, p, t, \tau) \mapsto (x, p/\tau)$
$\hat{\varphi}$	哈密顿同痕 $\varphi : T^*M \times I \rightarrow T^*M$ 的锥提升, 见4.2.3
\hat{L}	紧恰当拉格朗日子流形 $L \subset T^*M$ 的锥提升, 见4.2.4

第 1 章 引言

在 1960 到 1970 年间, Mikio Sato[1-3] 引进了现在所谓的代数分析和微局部分析. 代数分析的主要想法是用代数几何中的工具 (如范畴与层) 来解释和处理分析的问题; 而微局部分析的想法是对一个光滑流形 M , 通过考虑其余切丛 T^*M 来更好的理解 M 上的现象, 并把 M 上的一些对象 (如广义函数, 超函数, 微分算子) 当作 T^*M 上对象的投影来研究.

微局部层论, 则由 Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira 发展于 [4-6]. 得名于此, 是因为微局部层论确实受到了 Sato 想法的启迪. 事实上, 我们可以对每个光滑流形 M 上的层 F (在导出意义下), 构造一个余切丛上的闭 \mathbb{R}_+ 不变的余迷向子集 $SS(F)$, 称为 F 的奇异支撑 (亦称为微支撑或波前集), 它描述了层 F 的非传播方向. 奇异支撑是微局部层论的中心对象. 这个理论紧接着就被应用于奇性理论, D 模理论和辛几何. 本文特别关注微局部层论在辛几何中的应用.

在 [7](或 [8] 中有新的进展), Dimtry Tamarkin 证明了, 微局部层论可以用来解决辛几何的问题. 他给了一个 Arnold 非异置性猜想/定理的一个新的证明, 并给出了一些进一步的非异置性定理. 应用微局部层论的一个困难是所有的对象都有自然的 \mathbb{R}_+ 作用, 所以微局部层论实际上是在使用余切丛的齐次辛几何, 或者更本质的说是切触几何. 这与通常说的辛几何有一些差别. 通常, 我们利用添加一个变量的技巧, 把一般的辛几何问题转化成的齐次辛几何问题, 于是我们可以使用微局部层论的工具. 这个技巧首先被应用在全纯辛流形上 [9], 而后被 Tamarkin 应用于实辛流形. 我们将会在本文介绍这个技巧.

在本文中, 我们主要介绍 [10] 的方法-齐次哈密顿同痕的层量子化方法. 其中给出了一个较 [7] 简单得多的方法来用层论证明 Arnold 非异置问题. Tamarkin 的方式是, 修正微局部层论使之适应于通常的辛几何问题; 而我们的方式是把辛几何问题, 翻译成齐次辛几何问题, 再使用较为经典的层论. 需要注意, 这件事通常是做不到的, 而 Arnold 非异置问题恰好是能做到这种翻译的一个非常有趣的几何情形.

具体来说, 我们的工具是在层的 (导出) 范畴里找到一个齐次哈密顿同痕 $\phi_s, s \in I$ 的层量子化, 即一个层 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$ 使得其奇异支撑满足 $SS(\mathcal{K}|_s) \subset \text{Graph}(\varphi_s) \cup 0_{M \times M}, s \in I$, 使得 $\mathcal{K}|_0 \cong k_\Delta$. 然后利用层量子化和层的 Morse 理论来证明紧光滑流形余切丛的零截面满足 $\psi_s(0_M) \cap 0_M \neq \emptyset$, 其中

$\psi_s : T^*M \rightarrow T^*M$ 是 (非齐次) 的哈密顿同痕, 并在横截相交时给出相交数的下界. 这个定理首先由 Chaperon[11] 在环面上用 Conley 和 Zehnder 的变分结果解决. 后由 Hofer[12], Laudendbach 和 Sikov[13] 在任意紧流形上解决. 须知, 以上几位作者的方法多基于变分方法. 而我们应用的是纯粹的层论方法, 由此可见层论方法的威力所在.

另外, 若 $S \subset M$ 是一个子流形, 利用奇异支撑可以定义一个范畴 $D_S^b(M)$. $D_S^b(M)$ 是 $D^b(M)$ 的由奇异支撑包含于 T_S^*M 的全子范畴. 而齐次哈密顿同痕的层量子化则能说明, 范畴 T_S^*M 可以作为一个哈密顿不变量. 这是齐次哈密顿同痕层量子化的另一个应用. 而 Shende[14] 则证明了, 如果 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是一个扭结, 则 $D_S^b(M)$ 还可以决定扭结 (在只差镜面对称的意义下).

应该提及的是, 除了这些应用, 层论早在辛几何中实际上已经有了很多研究 [15–21]. Nadler 和 Zaslow 的工作引导我们在思考 Fukaya 范畴和层范畴之间的关系. Fukaya 范畴实际上是由伪全纯曲线, 特别是 Floer 理论, 给出的一些不变量. 然而 Nadler 和 Zaslow[19] 的工作告诉我们, 实解析流形余切丛的 Fukaya 范畴和底流形上的可构造层的 dg 范畴作为 A_∞ 范畴等价. 而利用这个等价可以在一些特定的情况轻易的证明同调镜像对称, 如 [22]. 这诱导我们思考, 是否对一般的辛流形上存在合适的层范畴能够与 Fukaya 范畴 A_∞ 等价, 进而来构造镜像对称. Tamarkin[21], Tsygan[23], Shende[24] 分别在一些情况尝试去构造了这样的范畴, 通常将这些范畴称为微局部范畴. 然而由于微局部范畴仍然未得到大量而广泛的研究, 所以它们和 Fukaya 范畴的 A_∞ 等价还是一个较为遥远的目标, 更遑论构造镜像对称了.

然而, 在一些稍简单一些的问题上, 微局部层论的构造, 能够给我们得到一些用 Fukaya 范畴得到过的经典定理. 具体来说, 我们将会看到, 在 Arnold 临近拉格朗日问题上, Guillermou[16] 用纯层论方法证明了 Kraph 的结果 [25]: 紧流形的余切丛中的紧恰当拉格朗日子流形的 Maslov 指标为 0; 并证明了 Fukaya 等 [26], Abouzaid[27] 的结果: 紧流形的余切丛中的紧恰当拉格朗日子流形与零截面同伦等价. 其中 [26, 27] 的结果使用了 Fukaya 范畴. 另外, Ike[28] 则用 Tamarkin 范畴和层量子化给出了余切丛中紧恰当拉格朗日子流形相交的下界估计, 特别的, 也给出了 Nadler[20] 和 Fukaya 等 [26] 结果. 从这些应用中我们可以看出, 层论在辛几何已经逐渐受到了重视, 并且已经走上了辛几何研究的前沿.

最后, 我们来介绍一下本文的结构. 首先我们假定本文的读者对层和导出范

畴, 尤其是 Grotendieck 6 函子有一定的熟悉 (可参考 [6, 第二章]). 在此基础上, 我们在第二章介绍我们用到的微局部层论. 在第三章证明层的 Morse 引理. 在第四章, 先回顾了一些基本的辛几何, 然后介绍了 Tamarkin 锥技巧, 并介绍了齐次哈密顿同痕的层量子化的应用. 第五章证明了齐次哈密顿同痕层量子化的存在性.

第 2 章 微局部层论

本章旨在介绍本文将会用到的一些基本的微局部层论, 包括奇异支撑的概念, 奇异支撑的函子性, 还有核的运算. 关于微局部层论, 读者可参阅 [6] 得到更多的细节. 最后, 本章将介绍层的局部有界导出范畴, 这部分将主要用在第五章, 第一次阅读可以略过.

2.1 奇异支撑

本节主要参考 [6, §5.1].

设 M 为光滑流形, 以 $Sh_k(M)$ 记 M 上 k 模层的范畴, 其有界导出范畴记为 $D^b(M) := D^b(Sh_k(M))$

对 M 中的闭集 $Z \subset M$, 相应的有嵌入 $Z \xrightarrow{i} M \xleftarrow{j} Z^c$. 考虑函子

$$\Gamma_Z : Sh_k(M) \rightarrow Sh_k(M), F \mapsto \Gamma_Z F = \ker(F \rightarrow j_* j^{-1} F),$$

其中, 层态射 $F \rightarrow j_* j^{-1} F$ 为 $F(U) \rightarrow j_* j^{-1} F(U) = F(U \setminus Z)$.

引理 2.1.1. 设 $F \in Sh_k(M)$,

1) $\Gamma_Z F(U) = \{s \in F(U) : \text{supp}(s) \subset Z\}$, 其中 $\text{supp}(s) = \{x \in U : s_x \neq 0\}$

2) 有函子的自然同构 $\Gamma_Z \cong \mathcal{H}om(k_{XZ}, \cdot)$, 其中 $k_{MZ} = i_* i^{-1} k_M$.

证明. 1) 由定义直接得到.

2) 令 $j : Z^c \rightarrow M$. $k_{MZ^c} = j_* j^{-1} k_M$. 则直接验证有层的正合列

$$0 \rightarrow k_{MZ^c} \rightarrow k_M \rightarrow k_{MZ} \rightarrow 0$$

将 $\mathcal{H}om(-, F)$ 应用其上, 得到层的正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{H}om(k_{MZ}, F) \rightarrow \mathcal{H}om(k_M, F) \rightarrow \mathcal{H}om(k_{MZ^c}, F)$$

根据伴随性

$$\mathcal{H}om(k_{MZ^c}, F) = \mathcal{H}om(j_* j^{-1} k_M, F) \cong \mathcal{H}om(k_M, j_* j^{-1} F),$$

和函子的自然同构

$$\mathcal{H}om(k_M, -) \cong \text{id}_{Sh_k(M)},$$

有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om(k_M, F) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(k_{MZ^c}, F) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ F & \longrightarrow & j_*j^{-1}F \end{array}$$

于是根据正合列定义, 有自然同构

$$\Gamma_Z F \cong \ker(F \rightarrow j_*j^{-1}F) \cong \mathcal{H}om(k_{MZ}, F).$$

□

据此引理, 函子 Γ_Z 是一个左正合函子. 于是它存在右导出函子:

$$R\Gamma_Z : D^b(M) \rightarrow D^b(M)$$

另外, 考虑左正合函子

$$\Gamma_Z(U, -) = \Gamma(U, -) \circ \Gamma_Z : Sh_k(M) \rightarrow \underline{k-Mod}, F \mapsto \Gamma_Z F(U),$$

及其导出函子:

$$R\Gamma_Z(U, -) : D^b(M) \rightarrow D^b(\underline{k-Mod})$$

上述引理告知我们, 函子 Γ_Z 将内射层映为松层, 于是有同构 $R\Gamma_Z(U, F) \cong R\Gamma(U, -) \circ R\Gamma_Z$.

借助函子 Γ_Z , 我们可以定义本文最核心的一个对象.

定义 2.1.1 (奇异支撑). 设 $F^\bullet \in D^b(M)$, $(x, p) \in T_x^*M$.

称 F^\bullet 在余方向 (x, p) 非传播, 如果 $\exists \varphi \in C^1(M)$, $\varphi(x) = 0$, $d\varphi(x) = p$, 且 $R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F^\bullet)_x \neq 0$.

称集合

$$SS(F^\bullet) := \overline{\{(x, p) \in T^*M : F^\bullet \text{ 在余方向 } (x, p) \text{ 非传播}\}}$$

为 F^\bullet 的奇异支撑, 或称微局部支撑.

这里, 为了解释奇异支撑的含义, 我们进一步来理解层在余方向非传播的含义. 等价的, 我们来考虑层在余方向传播的含义.

命题 2.1.1. 设 $F \in Sh_k(M)$, 则

$$R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_x \cong 0 \iff \varinjlim_{x \in U} H^i(U, F) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{x \in U} H^i(U \cap \{\varphi < 0\}, F), \forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

证明. 令 $Z = \{\varphi \geq 0\}$. 考虑层的正合列

$$0 \rightarrow k_{MZ^c} \rightarrow k_M \rightarrow k_{MZ} \rightarrow 0,$$

它导出了层的正合三角

$$k_{MZ^c} \rightarrow k_M \rightarrow k_{MZ} \xrightarrow{+1}.$$

应用函子 $R\mathcal{H}om(-, F)$, 于是有正合三角

$$R\mathcal{H}om(k_{MZ}, F) \rightarrow R\mathcal{H}om(k_M, F) \rightarrow R\mathcal{H}om(k_{MZ^c}, F) \xrightarrow{+1}.$$

注意, 有导出函子的自然同构

$$R\mathcal{H}om(k_{MZ}, F) \cong R\Gamma_Z F, R\mathcal{H}om(k_M, F) \cong F, R\mathcal{H}om(k_{MZ^c}, F) \cong Rj_* j^{-1} F,$$

于是我们得到了正合三角

$$R\Gamma_Z(F) \rightarrow F \rightarrow Rj_* j^{-1} F \xrightarrow{+1}$$

另外, 茎函子 $(-)_x \cong i_x^{-1}$ 是正合的, 所以有正合三角

$$R\Gamma_Z(F)_x \rightarrow F_x \rightarrow (Rj_* j^{-1} F)_x \xrightarrow{+1}.$$

所以,

$$R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_x \cong 0 \iff F_x \xrightarrow{\cong} Rj_* j^{-1} F.$$

取内射消解 $0 \rightarrow F \rightarrow I^\bullet$, 则

$$\mathcal{H}^i(F)_x \cong \mathcal{H}^i(I^\bullet)_x \cong \varinjlim_{x \in U} H^i(I^\bullet(U)) \cong \varinjlim_{x \in U} H^i(U, F).$$

同理

$$\mathcal{H}^i(Rj_* j^{-1} F)_x \cong \mathcal{H}^i(j_* j^{-1} I^\bullet)_x \cong \varinjlim_{x \in U} H^i(I^\bullet(U \cap \{\varphi < 0\})) \cong \varinjlim_{x \in U} H^i(U \cap \{\varphi < 0\}, F).$$

于是

$$F_x \xrightarrow{\cong} (Rj_* j^{-1} F)_x \iff \varinjlim_{x \in U} H^i(U, F) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{x \in U} H^i(U, Rj_* j^{-1} F).$$

综上,

$$R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_x \cong 0 \iff \varinjlim_{x \in U} H^i(U, F) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{x \in U} H^i(U \cap \{\varphi < 0\}, F).$$

□

借此引理, 我们可以发现层在一个余方向不传播的具体含义. 以此为契机, 可以重述我们关于奇异支撑的定义.

推论 2.1.1. 设 $F^\bullet \in D^b(M)$,

$$(x, p) \notin SS(F^\bullet) \iff \begin{array}{l} \exists O \subset T^*M, (x, p) \text{ 的开邻域, 使得 } \forall \varphi \in C^1(M), \varphi(x)=0, p=d\varphi(x) \in O \\ \text{有 } \varinjlim_{x \in U} \mathbb{H}^i(U, F^\bullet) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{x \in U} \mathbb{H}^i(U \cap \{\varphi < 0\}, F^\bullet), \forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \end{array}$$

下面, 我们先证明一些奇异支撑的简单性质.

命题 2.1.2. 设 $F^\bullet, F_i^\bullet \in D^b(M)$

- 1) $SS(F^\bullet)$ 是 \mathbb{R}_+ -不变的, 其中 \mathbb{R}_+ 作用由 $s \cdot (x, p) = (x, sp)$ 给出. $SS(F^\bullet[1]) = SS(F^\bullet)$.
- 2) (局部性) 设 $f: N \rightarrow M$ 为开嵌入. 则 $SS(f^{-1}F^\bullet) = df^*SS(F^\bullet)$. 特别的, 如果 $F_1^\bullet|_U \cong F_2^\bullet|_U$, $SS(F_1^\bullet) \cap T^*U = SS(F_2^\bullet) \cap T^*U, U \subset M$.
- 3) 如果等同 M 和其余切丛的零截面 0_M . 则有 $\pi_M(SS(F^\bullet)) = \text{supp}(F^\bullet) = SS(F^\bullet) \cap 0_M$, 其中 $\pi_M: T^*M \rightarrow M$ 为余切丛投影.
- 4) 设有正合三角: $F_1^\bullet \rightarrow F_2^\bullet \rightarrow F_3^\bullet \xrightarrow{+1}$, 则对 $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ 有

$$SS(F_a^\bullet) \subset SS(F_b^\bullet) \cup SS(F_c^\bullet), b \neq c$$

$$SS(F_a^\bullet) \Delta SS(F_b^\bullet) \subset SS(F_c^\bullet), c \neq a, b.$$

证明. (1) 注意到, 对 $s > 0, \varphi \in C^1(M), \varphi(x) = 0, \{\varphi \geq 0\} = \{s\varphi \geq 0\}$. 设 $p = d\varphi(x)$, 于是

$$(x, p) \in SS(F^\bullet) \iff R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}} \iff R\Gamma_{\{s\varphi \geq 0\}} \iff (x, sp) \in SS(F^\bullet).$$

第二条是因为, $R\Gamma_Z$ 和 $(\)_x$ 都是三角函子. 则 $R\Gamma_Z(F^\bullet)_x \cong 0 \iff R\Gamma_Z(F^\bullet[1])_x \cong 0$.

(2) $f: N \rightarrow M$ 开嵌入, 则有映射的分解 $N \xrightarrow{f} f(N) \xrightarrow{i} M$. 使得, f 是微分同胚. i 为开集 $U = f(M)$ 到 M 的自然嵌入. $Z \subset U$ 为闭集. 则有交换图.

$$\begin{array}{ccc} D^b(U) & \xrightarrow{f^{-1}} & D^b(N) \\ \downarrow R\Gamma_Z & & \downarrow R\Gamma_{f^{-1}Z} \\ D^b(U) & \xrightarrow{f^{-1}} & D^b(N) \end{array}$$

现取 $m = f(n) \in U, \varphi \in C^1(U), \varphi(m) = 0, d\varphi(m) = p$, 令 $Z = \{\varphi \geq 0\}$.

则 $f^{-1}Z = \{\varphi \circ f \geq 0\}$, $d(\varphi \circ f)(n) = df^*p$. 于是由于上述交换图,

$$R\Gamma_Z(F^\bullet|_U)_m = 0 \iff R\Gamma_{f^{-1}Z}(f^{-1}F^\bullet)_n = 0.$$

则 $(m, p) \in SS(F^\bullet|_U) \iff (n, f^*p) \in SS(f^{-1}F^\bullet)$.

最后, 注意到 $R\Gamma_Z(F^\bullet|_U) \cong R\Gamma_Z(F^\bullet)|_U$. 则有 $SS(f^{-1}F^\bullet) = df^*SS(F^\bullet)$.

第二部分只需注意到,

对开集 $i: U \rightarrow M, i^{-1}F^\bullet = F^\bullet|_U, di^*A = A \cap T^*U, A \subset M$.

(3) 如果 $x \in \text{supp}(F^\bullet)$, 则取 $\varphi = 0$, 有 $(R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}F^\bullet)_x \cong (F^\bullet)_x \neq 0$, 则 $(x, 0) \in SS(F^\bullet) \cap 0_M$. 即 $\text{supp}(F^\bullet) \subset SS(F^\bullet) \cap 0_M$.

$SS(F^\bullet) \cap 0_M \subset \pi_M(SS(F^\bullet))$ 是平凡的.

最后, 如果 $(x, p) \in SS(F^\bullet)$. 由于 F^\bullet 是层的有界复形, 不妨设 F^\bullet 集中于 $[0, m]$. 从而 $\text{supp}(F^\bullet) = \cup_{i=0}^m \text{supp}(\mathcal{H}^i(F^\bullet))$.

此时, 如果设 $x \notin \text{supp}(F^\bullet)$, 于是 $\forall i \in [0, m]$, 存在开集 $O_i \subset M, i = 0, 1, \dots, m$, 使得: 若 $y \in O_i$, 则 $(\mathcal{H}^i(F^\bullet))_y \cong 0$.

令 $O = \cap_{i=0}^m O_i$, 则 $(\mathcal{H}^i(F^\bullet))_y \cong 0, \forall y \in O, \forall i \in [0, m]$.

从而, $F^\bullet|_O \cong 0$. 于是, $R\Gamma_Z(F^\bullet)_x \cong 0, \forall x \in O$. 这与 $x \in \text{supp}(F^\bullet)$ 矛盾. 则 $x \in \text{supp}(F^\bullet)$.

综上所述,

$$\pi_M(SS(F^\bullet)) = \text{supp}(F^\bullet) = SS(F^\bullet) \cap 0_M.$$

(4) 对正合三角 $F_1^\bullet \rightarrow F_2^\bullet \rightarrow F_3^\bullet \xrightarrow{+1}$, 连续应用函子 $R\Gamma_Z, (-)_x$, 得到了正合三角,

$$R\Gamma_Z(F_1^\bullet)_x \rightarrow R\Gamma_Z(F_2^\bullet)_x \rightarrow R\Gamma_Z(F_3^\bullet)_x \xrightarrow{+1}.$$

于是对于 $b \neq c, R\Gamma_Z(F_b^\bullet)_x \cong R\Gamma_Z(F_c^\bullet)_x \cong 0 \Rightarrow R\Gamma_Z(F_a^\bullet)_x \cong 0$

因此若 $(x, p) \notin SS(F_b^\bullet) \cup SS(F_c^\bullet)$,

取 (x, p) 的开邻域 $O \subset T^*M, \varphi(x) = 0, d\varphi(x) \in O, Z = \{\varphi \geq 0\}$. 则由上述讨论, $(x, p) \notin SS(F_i^\bullet)$.

对第二条, 不妨设 $a = 1, b = 2, c = 3$. 若 $(x, p) \notin SS(F_3^\bullet)$, 取 (x, p) 的开邻域 $O \subset T^*M, \varphi(x) = 0, d\varphi(x) \in O, Z = \{\varphi \geq 0\}, R\Gamma_Z(F_3^\bullet)_x \cong 0$.

于是根据以上三角, 有同构 $R\Gamma_Z(F_1^\bullet)_x \cong R\Gamma_Z(F_2^\bullet)_x$. 则他们俩或者同时为零, 或者同时非零.

即 $(x, p) \notin SS(F_1^\bullet) \Delta SS(F_2^\bullet)$.

□

下面, 我们来计算几个基本的例子.

例 2.1.1. 常值层: $SS(k_M) = 0_M$.

利用奇异上同调消解, 有 $H^i(U, k_M) \cong H^i(U, k)$, 后者为拓扑空间 U 的 k 系数奇异上同调.

首先, $\text{supp}(k_M) = M$, 于是只需说明, 如果 $(x, p) \in T^*M$ 有 $p \neq 0$, 则 k_M 在 (x, p) 传播.

取 $\forall \varphi \in C^1(M), \varphi(x) = 0, d\varphi(x) = p \neq 0$.

由于 $p \neq 0$, 由隐函数定理, 在 x 可取充分小的开集 U , 使得 U 同胚于小圆盘, $U \cap \{\varphi < 0\}$ 同胚于半圆盘, 且这样的 U 在 x 周围可以组成一个邻域系. 于是可缩性确保了下列同构

$$H^i(U, k_M) \rightarrow H^i(U \cap \{\varphi < 0\}, k_M), \forall i \in \mathbb{Z}.$$

特别的, 取极限 \varinjlim_U 之后, 仍然有同构. 即 $(x, p) \in T^*M \setminus 0_M$ 传播.

例 2.1.2. 局部常值层: 设 F 是一个局部常值层, 则 $SS(F) = 0_M$.

事实上, 根据奇异支撑的局部性和常值层的结果, 就直接到了.

反过来, 我们将在后面证明. 如果 $SS(F^\bullet) = 0_M$, 那 F^\bullet 的每个上同调层 $\mathcal{H}^i(F^\bullet)$ 都是局部常值的.

例 2.1.3. 闭区域上的局部常值层:

设 D 是 M 中一个开集的闭包, 带有光滑边界 ∂D . 对 $\forall x \in \partial D$, 取一个 ∂D 的外余法向量 $\nu(x)$, 即 $\langle \nu(x), v \rangle = 0, v \in T_x \partial D, \langle \nu(x), n(x) \rangle > 0$, $n(x)$ 为外法向量.

令 $N_i^* = \{(x, -sv(x)) : x \in \partial D, s \geq 0\}$, 为 ∂D 的内余法丛.

对层 $k_{MD}(U) = \{U \cap D \text{ 上的局部常值函数}\}$, 断言: $SS(k_{MD}) = 0_D \cup N_i^*$.

由于 $\text{supp}(k_{MD}) = D$, 则 $SS(k_{MD}) \cap T_x^*M = \emptyset, x \in D^c$, 且 $0_D \subset SS(k_{MD})$.

令 $W = \overset{\circ}{D}$, 由于 $k_{MD}|_W = k_M|_W$. 则根据局部性, $SS(k_{MD}) \cap T^*W = SS(k_M) \cap T^*W = 0_W$.

所以只需考虑边界的情况, 对 $x \in \partial D$, 根据局部性, 不妨设 $D = \{\varphi \geq 0\}$, $d\varphi(x) \neq 0, x \in \partial D$. 此时可取 $\nu(x) = -d\varphi(x)$.

考虑余方向 $(x, d\varphi(x)), x \in \partial D$,

那么 $H^0(U \cap \{\varphi < 0\}, k_{MD}) = k_{MD}(U \cap \{\varphi < 0\}) = 0, \forall U \subset M$ 开集. 然而限制态射

$$\mathbb{R} \cong (k_{MD})_x \cong \varinjlim_U H^0(U, k_{MD}) \rightarrow \varinjlim_U H^0(U \cap \{\varphi < 0\}, k_{MD}) \cong 0,$$

不是同构. 于是余方向 $(x, d\varphi(x)) \in SS(k_{MD}), x \in \partial D$. 之后, 由于 \mathbb{R}_+ -不变性, 有 $N_i^* \subset SS(k_{MD})$.

反过来, 对任何 C^1 函数 $\psi, \psi(x) = 0, x \in \partial D$, 使得 $d\psi(x)$ 不是 $\nu(x)$ 的负倍数. 那么根据隐函数定理, 可以取到 x 的充分小的开邻域 U 使得 $U \cap D$ 和 $U \cap D \cap \{\psi < 0\}$ 可缩, 并且这样的 U 组成一个 x 的邻域系. 另外, 注意到有自然同构 $R\Gamma(U, k_{MD}) \cong R\Gamma(U \cap D, k_D)$, 从而有交换图:

$$\begin{array}{ccc} H^i(U, k_{MD}) & \xrightarrow{f^{-1}} & H^i(U \cap \{\psi < 0\}, k_{MD}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^i(U \cap D, k_D) & \xrightarrow{f^{-1}} & H^i(U \cap D \cap \{\psi < 0\}, k_D) \end{array}$$

由于可缩性, 则下方水平限制态射是同构. 于是上方水平限制态射是同构. 那么对 U 取正向极限, 则知层 k_{MD} 在余方向 $(x, d\psi(x))$ 上传播. 于是 $SS(k_{MD}) \cap T_x^*M \subset N_i^*, x \in \partial D$.

综上, 有 $SS(k_{MD}) = 0_D \cup N_i^*$.

例 2.1.4. 开区域上的局部常值层:

设 U 是 M 中带有光滑边界 ∂U 的开区域. 对 $\forall x \in \partial U$, 取一个 ∂U 的外余法向量 $\nu(x)$, 即 $\langle \nu(x), v \rangle = 0, v \in T_x\partial U, \langle \nu(x), n(x) \rangle > 0, n(x)$ 为外法向量.

令 $N_e^* = \{(x, s\nu(x)) : x \in \partial U, s \geq 0\}$, 为 ∂U 的内余法从.

对层 $k_{MU}(O) = \{U \cap O \text{ 上, } O \cap \partial U \text{ 附近消失的局部常值函数}\}$,

断言: $SS(k_{MU}) = 0_U \cup N_e^*$.

对于此例, 我们既可以重复上例的操作. 然而这里有更聪明的做法, 我们用三角不等式来控制. 事实上, 我们有层的正合三角 $k_{MU} \rightarrow k_M \rightarrow k_{MU^c} \xrightarrow{+1}$. 所以

据三角不等式, 有

$$SS(k_{MU}) \subset SS(k_M) \cup SS(k_{MU^c}), SS(k_{MU^c}) \subset SS(k_M) \cup SS(k_{MU}).$$

然而须知 U^c 的内余法向量恰为 U 的外余法向. 则

$$SS(k_{MU}) \subset 0_M \cup N_e^*, N_e^* \subset 0_M \cup SS(k_{MU}).$$

另由于 $\pi_M(SS(k_{MU})) = SS(k_{MU}) \cap 0_M = \text{supp}(k_{MU}) = \bar{U}$. 则两个约束结合即给出 $SS(k_{MU}) = 0_U \cup N_e^*$.

2.2 奇异支撑与函子运算

本节旨在介绍层在 Grothendieck 的 6-函子下, 奇异支撑的变化. 由于部分定理证明较繁杂, 其证明可见 [6, §5.4].

定理 2.2.1. [6, 命题 5.4.1, 5.4.2] 设 $F^\bullet \in D^b(M), G^\bullet \in D^b(N), M \xleftarrow{p_M} M \times N \xrightarrow{p_N}$. 则

$$SS(F^\bullet \boxtimes^L G^\bullet) \subset SS(F) \times SS(G),$$

$$SS(R\mathcal{H}om(p_M^{-1}F^\bullet, p_N^{-1}G^\bullet)) \subset SS(F)^a \times SS(G).$$

以下假设 $f: M \rightarrow N$ 为光滑流形之间的光滑映射. 于是, 我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} T^*M & \xleftarrow{df^*} & M \times_N T^*N & \xrightarrow{f_\pi} & T^*N \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ & & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

定理 2.2.2. [6, 命题 5.4.4] 令 $F^\bullet \in D^b(M)$, 设 f 在 $\text{supp}(F^\bullet)$ 上逆紧, 则

$$SS(Rf_*F^\bullet) \subset f_\pi(df^*)^{-1}SS(F^\bullet).$$

且当 f 是闭嵌入时, 上述包含取等号.

证明. : 若 f 在 $\text{supp}(F^\bullet)$ 上逆紧, 则 $Rf_*F^\bullet \cong Rf_!F^\bullet$. 实际上, 在计算中将用到两者的特性.

设 $(y, p) \in T^*N, F^\bullet$ 在 $(x, df_y^*(p)), \forall x \in f^{-1}(y)$ 传播,

取 $\varphi \in C^1(N), \varphi(y) = 0, d\varphi(y) = p$. 则对 $\forall x \in f^{-1}(y), \psi = \varphi \circ f$ 有:
 $\psi(x) = 0, d\psi(x) = df_y^*(p)$. 于是根据传播的定义, 有

$$R\Gamma_{\{\psi \geq 0\}}(F^\bullet) |_{f^{-1}(y)} \cong 0.$$

另一方面

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(Rf_*F^\bullet)_y &\cong (Rf_*R\Gamma_{\{\psi \geq 0\}}(F^\bullet))_y \\ &\cong R\Gamma(f^{-1}(y), R\Gamma_{\{\psi \geq 0\}}(F^\bullet)) \\ &\cong 0. \end{aligned}$$

其中第一个同构是因为

$$R\Gamma_Z(Rf_*F^\bullet) \cong R\mathcal{H}om(k_{NZ}, Rf_*F^\bullet) \cong Rf_*R\mathcal{H}om(k_{Mf^{-1}Z}, F^\bullet).$$

第二个同构是因为 $Rf_*F^\bullet \cong Rf_!F^\bullet$, 于是用逆紧基变换定理.

所以, F^\bullet 在 $(y, p) \in T^*N$ 传播. 于是有 $SS(Rf_*F^\bullet) \subset f_\pi(df^*)^{-1}SS(F^\bullet)$.

特别的, 当 f 是闭嵌入时, 逆紧性假设是自明的. 且 $f^{-1}(y)$ 是单点. 于是上述计算也能蕴含反包含. \square

此公式有一个简单的应用:

例 2.2.1. 子流形上的局部常值层: 设 $i: S \rightarrow M$ 为闭子流形, \mathcal{L} 是 S 上的局部常值层. 则 $SS(i_*\mathcal{L}) = T_S^*M$.

由于 i 是闭嵌入, 从而 i_* 是正合函子, 于是 $i_* \cong Ri_*$. 因此根据定理 2.2.2 有,

$$SS(i_*\mathcal{L}) = (di^*)^{-1}(SS(\mathcal{L})).$$

然而, $SS(\mathcal{L}) = 0_S$. 于是

$$SS(i_*\mathcal{L}) = \text{Ker}(di^*) = T_S^*M.$$

观察这个例子还有上节的例子, 我们发现一个现象: 层的奇异支撑将会是辛流形 $(T^*M, d\alpha)$ 的“拉格朗日子集”. 然而, 这个初步印象不完全正确. 但是, 它有一个更正确的叙述, 由 Kashiwara 证明:

定理 2.2.3 (Kashiwara 余迷向定理). [6, 定理 6.5.4] 设 $F^\bullet \in D^b(M)$, 则

$SS(F^\bullet)$ 是 $(T^*M, d\alpha)$ 的“余迷向子集”; 且 $SS(F^\bullet)$ 是拉格朗日的, 当且仅当 F^\bullet 是“可构造”的

Kashiwara 最初将本定理运用于全纯 D 模的理论, 给了全纯 D 模的特征簇是余迷向的一个新的证明. 然而, 整个微局部层论的构造本身对辛几何 (实际上说切触几何更为合适) 是完全自然的. 所以, 它是微局部层论进入辛几何的思想起源. 鉴于本文并不会直接应用此定理, 就将其略过.

下面讨论逆像函子, 此处需要介绍一个概念.

我们称光滑映射 f 沿着一个闭 \mathbb{R}_+ -子集 $\Lambda \subset T^*N$ 是非特征的, 如果

$$(x, p) \in \Lambda, \text{ 且 } df^*(p) = 0 \Rightarrow p = 0.$$

特别地, 如果 f 是个淹没, 则自然是非特征的.

定理 2.2.4. [6, 命题 5.4.13] 设 $G^\bullet \in D^b(N)$, 且 $f: M \rightarrow N$ 沿着 $SS(G^\bullet)$ 非特征, 则

- 1) $SS(f^{-1}G^\bullet) \subset df^*f_\pi^{-1}SS(G^\bullet)$, 且当 f 是淹没时, 等号成立.
- 2) $f^{-1}G^\bullet \otimes \omega_{M/N} \rightarrow f^!G^\bullet$ 是自然同构.

推论 2.2.1. [6, 命题 5.4.14] 令 $F_1^\bullet, F_2^\bullet \in D^b(M)$.

- 1) 若 $SS(F_1^\bullet) \cap SS(F_2^\bullet)^a \subset 0_M$, 则

$$SS(F_1^\bullet \overset{L}{\otimes} F_2^\bullet) \subset SS(F_1^\bullet) + SS(F_2^\bullet).$$

- 2) 若 $SS(F_1^\bullet) \cap SS(F_2^\bullet) \subset 0_M$, 则

$$SS(R\mathcal{H}om(F_2^\bullet, F_1^\bullet)) \subset SS(F_2^\bullet)^a + SS(F_2^\bullet).$$

证明. 令 $\delta: M \rightarrow M \times M$ 为对角映射, $q_i: M \times M \rightarrow M$ 为到第 i 个因子的投影. 则有

$$d\delta^*: (x, p_1) \times (x, p_2) \mapsto (x, p_1 + p_2),$$

- 1) 根据定义, 有 $\delta^{-1}(F_1^\bullet \overset{L}{\boxtimes} F_2^\bullet) \cong F_1^\bullet \overset{L}{\otimes} F_2^\bullet$.

于是, 条件直接保证了, 对角映射 δ 对 $SS(F_1^\bullet) \times SS(F_2^\bullet)$ 非特征. 于是根据定理2.2.4和2.2.1有

$$SS(F_1^\bullet \overset{L}{\otimes} F_2^\bullet) \subset d\delta^*\delta_\pi^{-1}(SS(F_1^\bullet) \times SS(F_2^\bullet)) \subset SS(F_1^\bullet) + SS(F_2^\bullet).$$

2) 首先注意到

$$\delta^1 R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^!F_1^\bullet) \cong R\mathcal{H}om(F_2^\bullet, F_1^\bullet).$$

定理 2.2.4 告诉我们 $q_1^!F_1^\bullet \cong q_1^{-1}F_1^\bullet \otimes_{q_1^!k_M}^L k_M$. 然而, $q_1^!k_M$ 局部同构于 $k_{M \times M}[\dim M]$, 则 $q_1^!F_1^\bullet$ 局部同构于 $q_1^{-1}F_1^\bullet[\dim M]$. 从而,

$$R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^!F_1^\bullet) \text{ 局部同构于 } R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^{-1}F_1^\bullet)[\dim M].$$

进而由定理 2.2.1 告诉我们

$$\begin{aligned} & SS(R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^!F_1^\bullet)) \\ &= SS(R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^{-1}F_1^\bullet)) \\ &\subset SS(F_2^\bullet)^a \times SS(F_1^\bullet). \end{aligned}$$

现在, 由于 δ 对 $SS(F_2^\bullet)^a \times SS(F_1^\bullet)$ 非特征当且仅当 $SS(F_2^\bullet) \cap SS(F_1^\bullet) \subset 0_M$. 恰为我们的条件, 则由定理 2.2.4.

$$\delta^1 R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^!F_1^\bullet) \cong \delta^{-1} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^!F_1^\bullet) \otimes_{\omega_{M/M \times M}}^L \omega_{M/M \times M}.$$

这里需要计算 $\omega_{M/M \times M}$. 首先注意 $k_M \cong \delta^1 q_2^! k_M$. 而 $q_2^! k_M \cong \omega_M \boxtimes^L k_M$ 是局部常值的, 则其奇异支撑是零截面. 于是根据定理 2.2.4, 有

$$k_M \cong \delta^1(\omega_M \boxtimes^L k_M) \cong \delta^{-1}(\omega_M \boxtimes^L k_M) \otimes_{\omega_{M/M \times M}}^L \omega_{M/M \times M} \cong \omega_M \otimes_{\omega_{M/M \times M}}^L \omega_{M/M \times M}.$$

所以

$$\omega_{M/M \times M} \cong \omega_M[-2\dim M].$$

是局部常值的, 于是其奇异支撑是零截面. 所以由 1) 与 2.2.4 有,

$$\begin{aligned} & SS(R\mathcal{H}om(F_2^\bullet, F_1^\bullet)) \\ &= SS(\delta^1 R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^!F_1^\bullet)) \\ &= SS(\delta^{-1} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^!F_1^\bullet) \otimes_{\omega_{M/M \times M}}^L \omega_{M/M \times M}) \\ &= SS(\delta^{-1} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^!F_1^\bullet)) + 0_M \\ &= d\delta^* \delta_\pi^{-1}(SS(R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2^\bullet, q_1^!F_1^\bullet))) \\ &\subset d\delta^* \delta_\pi^{-1}(SS(F_2^\bullet)^a \times SS(F_1^\bullet)) \\ &= SS(F_2^\bullet)^a + SS(F_1^\bullet). \end{aligned}$$

□

最后, 我们需要提及下述定理, 它在奇异支撑的应用中起了很大作用. 然而其证明较繁, 我们在此略过.

定理 2.2.5. [6, 命题 5.4.5] 设 $f: M \rightarrow N$ 是淹没, $F^\bullet \in D^b(M)$. 若, $SS(F^\bullet) \subset df^*(M \times_N T^*N)$, 则 $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall y \in N, \mathcal{H}^i(F^\bullet)|_{f^{-1}(y)}$ 是局部常值的.

于是, 若 f 是常值映射, 则恰好给出了常值层奇异支撑的反向结果. 我们将在第二章给它一个无需此定理的完整证明.

推论 2.2.2. 设 $F^\bullet \in D^b(M)$, 且 $SS(F^\bullet) \subset 0_M$, 则 $\forall i \in \mathbb{Z}, \mathcal{H}^i(F^\bullet)$ 同构于局部常值层.

我们实际上需要的是这个定理的一个推论.

推论 2.2.3. 令 I 是一个可缩流形, $p: M \times I \rightarrow M$ 是投影. 如果, $SS(F^\bullet) \subset T^*M \times 0_I$, 则在导出范畴里 $D^b(M \times I)$ 有同构 $F^\bullet \cong p^{-1}Rp_*F^\bullet$

证明. p 的余切映射 $dp_x^*: T_xM \rightarrow T_{x,t}(M \times I), \xi \mapsto (\xi, 0)$. 于是, $dp^*(M \times_{M \times I} T^*(M \times I)) = T^*M \times 0_I$. 于是根据上述定理 2.2.5, 则 $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall x \in M, \mathcal{H}^i(F^\bullet)|_{p^{-1}(x)}$ 是局部常值的.

方便起见, 令 $I_x = p^{-1}(x) \cong I, \forall x \in M$. 则我们得到了 $\mathcal{H}^i(F^\bullet)|_{I_x}$ 是可缩空间 I_x 上的局部常值层, 从而是常值层.

另一方面, 由伴随性有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{D^b(M)}(Rp_*F^\bullet, Rp_*F^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(M \times I)}(p^{-1}Rp_*F^\bullet, F^\bullet).$$

于是 $\mathrm{id}_{Rp_*F^\bullet}$ 决定了层复形的态射 $p^{-1}Rp_*F^\bullet \rightarrow F^\bullet$. 于是只需验证此态射是拟同构.

此处先对 M 紧的情况证明. 取一个内射消解 $F^\bullet \rightarrow I^\bullet$, 于是 $\mathcal{H}^i(F^\bullet) \cong \mathcal{H}^i(I^\bullet)$, 且由导出函子定义, $R^i p_*F^\bullet \cong \mathcal{H}^i(p_*I^\bullet)$. 则 $\forall (x, t) \in M \times I$

$$(p^{-1}R^i p_*F^\bullet)_{(x,t)} \cong (p_*\mathcal{H}^i(I^\bullet))_x \cong \Gamma(I_x, \mathcal{H}^i(I^\bullet)|_{I_x}) \cong \mathcal{H}^i(I^\bullet)_{(x,t)} \cong \mathcal{H}^i(F^\bullet)_{(x,t)}.$$

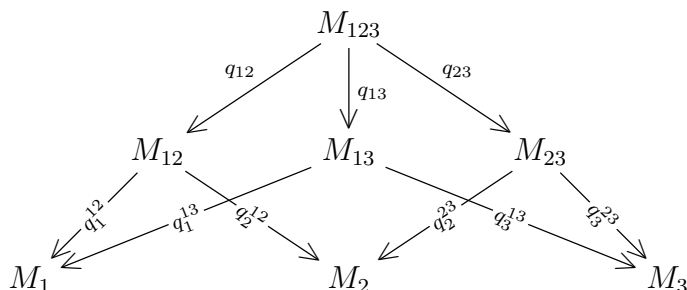
其中, 倒数第二个同构是因为常值层.

若 M 非紧, 取 M_i 为 M 的一个穷竭, 即 $M = \cup_i M_i, M_i$ 紧, $M_i \subset \overset{\circ}{M}_{i+1}$. 则 $\forall x \in M, \exists n, x \in M_n$, 将上述计算限制到 $M_n \times I$ 上, 从而得到结果. \square

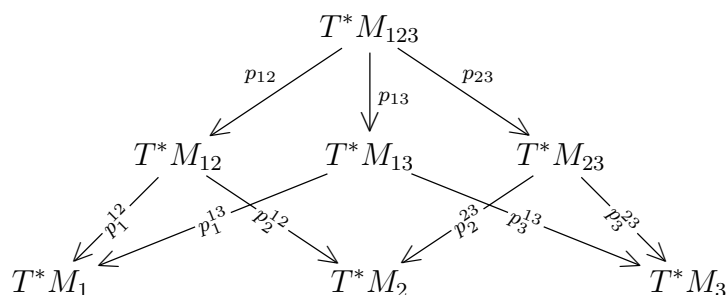
2.3 核与层的卷积

本节可参考 [6, §3.6] 与 [10, §1.6]

设 $M_i, i = 1, 2, 3$ 为流形. $M_{ij} := M_i \times M_j, i, j = 1, 2, 3. M_{123} = M_1 \times M_2 \times M_3.$ 相应的投影映射, 本节用 q 标记, 如下图,



对应到余切丛上, 也有相应的投影, 本节用 p 标记. 注意, 此处的投影是由 $T^*(M \times N) \cong T^*M \times T^*N \rightarrow T^*M$ 给出的. 如下图



如果有 $\mathcal{K}_1 \in D^b(M_{12}), \mathcal{K}_2 \in D^b(M_{23}).$ 定义

$$\begin{aligned} \circ_{M_2} : D^b(M_{12}) \times D^b(M_{23}) &\rightarrow D^b(M_{13}), \\ \mathcal{K}_1 \circ_{M_2} \mathcal{K}_2 &:= R(q_{13}!) \left(q_{12}^{-1} \mathcal{K}_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} \mathcal{K}_2 \right). \end{aligned}$$

为层 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ 的卷积. 通常, 将下标 M_2 省略.

例 2.3.1.

令 $M_1 = M, M_2 = M, M_3 = N,$ 则

$$\circ : D^b(M \times M) \times D^b(M \times N) \rightarrow D^b(M \times N).$$

特别地, 令 $\mathcal{K}_1 = k_\Delta \in D^b(M \times M),$ 其中 Δ 是 $M \times M$ 的对角线; $\mathcal{K}_2 = K \in$

$D^b(M \times N)$. 此时

$$\begin{aligned}
 k_\Delta \circ \mathcal{K} &= R(q_{13}!) \left(q_{12}^{-1} k_\Delta \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} \mathcal{K} \right) \\
 &\cong R(q_{13}!) \left(k_{\Delta \times N} \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} \mathcal{K} \right) \\
 &\cong R(q_{13}!) \left(k_{\Delta \times N} \overset{L}{\otimes} q_{13}^{-1} \mathcal{K} \right) \\
 &\cong (R(q_{13}!) k_{\Delta \times N}) \overset{L}{\otimes} \mathcal{K} \\
 &\cong k_{M \times N} \overset{L}{\otimes} \mathcal{K} \\
 &\cong \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

其中第二个同构是因为, 在 Δ 上时, $q_{13} = q_{23}$. 第三个同构则是投射公式 $Rf_! F \overset{L}{\otimes} G \cong Rf_!(F \overset{L}{\otimes} f^{-1}G)$ 的结果.

特别地, 由于以上同构都是函子的自然同构, 于是有函子的自然同构

$$k_\Delta \circ - \simeq \text{id} : D^b(M \times N) \rightarrow D^b(M \times N).$$

同理, 对 $M_1 = N, M_2 = M, M_3 = M$ 也有

$$- \circ k_\Delta \simeq \text{id} : D^b(N \times M) \rightarrow D^b(N \times M).$$

例 2.3.2.

令 $M_1 = M, M_2 = I, M_3 = \{\text{pt}\}$.

$$\circ : D^b(M \times I) \times D^b(I) \rightarrow D^b(M).$$

特别地, 令 $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K} \in D^b(M \times I)$, $\mathcal{K}_2 = k_{s=s_0}$ 是摩天大厦层. 注意, 此时 $q_{12} = \text{id}_{M \times I}$, $q_{13} = q_M : M \times I \rightarrow M$, $q_{23} = q_I : M \times I \rightarrow I$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} \circ k_{s=s_0} &= R(q_{13}!) \left(q_{12}^{-1} \mathcal{K} \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} k_{s=s_0} \right) \\
 &\cong Rq_M! \left(\mathcal{K} \overset{L}{\otimes} q_I^{-1} k_{s=s_0} \right) \\
 &\cong Rq_M! \left(\mathcal{K} \overset{L}{\otimes} k_{M \times s=s_0} \right) \\
 &\cong Rq_M! (Ri_{s_0!} i_{s_0}^{-1} \mathcal{K}) \\
 &\cong R(q_M i_{s_0})! (i_{s_0}^{-1} \mathcal{K}) \\
 &\cong R(\text{id}_M)! (i_{s_0}^{-1} \mathcal{K}) \\
 &\cong i_{s_0}^{-1} \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

其中 $i_{s_0} : M \rightarrow M \times I, x \mapsto (x, s_0)$ 特别地, 由于以上同构都是函子的自然同构, 于是有函子的自然同构

$$- \circ k_{s=s_0} \simeq i_{s_0}^{-1} : D^b(M \times I) \rightarrow D^b(M)$$

例 2.3.3 (结合性).

设有流形 $M_i, i = 1, 2, 3, 4$. $\mathcal{K}_i \in M_{i,i+1}, i = 1, 2, 3$, 则利用逆紧基变换和投射公式, 有

$$(\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2) \circ \mathcal{K}_3 \cong \mathcal{K}_1 \circ (\mathcal{K}_2 \circ \mathcal{K}_3).$$

事实上, 令

$$\begin{aligned} M_{1234} &= M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4, \\ q_{ijk} &: M_{1234} \rightarrow M_{ijk}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ q_{st}^{ijk} &: M_{ijk} \rightarrow M_{st}, \quad s, t \in \{i, j, k\}, \\ q_{st} &= q_{st}^{ijk} \circ q_{ijk} : M_{1234} \rightarrow M_{st} \quad s, t \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

分别为相应的投影. 于是 $\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2 = Rq_{13!}^{123}((q_{12}^{123})^{-1} \mathcal{K}_1 \overset{L}{\otimes} (q_{23}^{123})^{-1} \mathcal{K}_2)$, 从而

$$\begin{aligned} &(\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2) \circ \mathcal{K}_3 \\ &= Rq_{14!}^{134} \left[(q_{13}^{134})^{-1} (\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2) \overset{L}{\otimes} (q_{34}^{134})^{-1} \mathcal{K}_3 \right] \\ &= Rq_{14!}^{134} \left[(q_{13}^{134})^{-1} \left(Rq_{13!}^{123} \left((q_{12}^{123})^{-1} \mathcal{K}_1 \overset{L}{\otimes} (q_{23}^{123})^{-1} \mathcal{K}_2 \right) \right) \overset{L}{\otimes} (q_{34}^{134})^{-1} \mathcal{K}_3 \right] \\ &\cong Rq_{14!}^{134} \left[Rq_{134!} \left(q_{123}^{-1} \left((q_{12}^{123})^{-1} \mathcal{K}_1 \overset{L}{\otimes} (q_{23}^{123})^{-1} \mathcal{K}_2 \right) \right) \overset{L}{\otimes} (q_{34}^{134})^{-1} \mathcal{K}_3 \right] \\ &\cong Rq_{14!}^{134} \left[Rq_{134!} \left(q_{12}^{-1} \mathcal{K}_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} \mathcal{K}_2 \overset{L}{\otimes} q_{34}^{-1} \mathcal{K}_3 \right) \right] \\ &\cong Rq_{14!} \left(q_{12}^{-1} \mathcal{K}_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} \mathcal{K}_2 \overset{L}{\otimes} q_{34}^{-1} \mathcal{K}_3 \right). \end{aligned}$$

同理亦有

$$\mathcal{K}_1 \circ (\mathcal{K}_2 \circ \mathcal{K}_3) \cong Rq_{14!} \left(q_{12}^{-1} \mathcal{K}_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} \mathcal{K}_2 \overset{L}{\otimes} q_{34}^{-1} \mathcal{K}_3 \right).$$

于是有结合性.

一个基本的问题是, 两个层的卷积有奇异支撑, 于是上一节给出的函子运算自然给出了这个奇异支撑的一些界. 然而, 我们需要适当的描述和约束.

本节中, 对余切丛的坐标约定 $\xi_i = (x_i, p_i) \in T^*M_i, (\xi_i, \xi_j) = (x_i, x_j, p_i, p_j) \in T^*M_{ij}$

现在设 $\Lambda_1 \subset T^*M_{12}, \Lambda_2 \subset T^*M_{23}$. 定义这两个集合的卷积如下

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 := p_{13} \left(p_{12^a}^{-1}(\Lambda_1) \cap p_{23}^{-1}(\Lambda_2) \right) \subset T^*M_{23}.$$

其中,

$$p_{12^a} : T^*M_{123} \rightarrow T^*M_{12}, (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (\xi_1, -\xi_2).$$

于是

$$\begin{aligned} & \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \\ &= \{(\xi_1, \xi_3) \in T^*M_{13} : \exists \xi_2 \in T^*M_2, \text{使得}, (\xi_1, -\xi_2) \in \Lambda_1, (\xi_2, \xi_3) \in \Lambda_2\}. \end{aligned}$$

于是当 $\Lambda_i = SS(\mathcal{K}_i) \subset T^*M_{i,i+1}$ 时, 并作如下假设

$$\begin{cases} a) \text{supp}(\mathcal{K}_1) \times_{M_2} \text{supp}(\mathcal{K}_2) \rightarrow M_{13} \text{逆紧,} \\ b) (p_{12^a}^{-1}(\Lambda_1) \cap p_{23}^{-1}(\Lambda_2)) \cap (0_{M_1} \times T^*M_2 \times 0_{M_3}) \subset 0_{M_{123}}. \end{cases}$$

假设 $a)$ 用来保证定理2.2.2 的使用, 假设 $b)$ 用来保证定理2.2.4 和推论2.2.1 1) 的使用. 于是有上界公式

$$SS(\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2) \subset SS(\mathcal{K}_1) \circ SS(\mathcal{K}_2).$$

在本文中, 需要一个相对版本的卷积, 我们介绍如下, 此处设 I 是一个流形.

令 $\mathcal{K}_1 \in D^b(M_{12} \times I), \mathcal{K}_2 \in D^b(M_{23} \times I)$, 则令

$$\mathcal{K}_1 \circ_I \mathcal{K}_2 := R(q_{13I}!) \left(q_{12I}^{-1} \mathcal{K}_1 \overset{L}{\otimes} q_{23I}^{-1} \mathcal{K}_2 \right).$$

其中 $q_{ijI} = q_{ij} \times \text{id}_I$

并对 $\Lambda_1 \subset T^*(M_{12} \times I), \Lambda_2 \subset T^*(M_{23} \times I)$ 定义集合的相对卷积

$$\Lambda_1 \circ_I \Lambda_2 := r_{13} \left(r_{12^a}^{-1}(\Lambda_1) \cap r_{23}^{-1}(\Lambda_2) \right) \subset T^*(M_{13} \times I).$$

其中各映射 $T^*M_{123} \times (T^*I \times_I T^*I) \rightarrow T^*M_{ij}$ 由下述表达式给出:

$$r_{12^a} : (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times (\tau_1, \tau_2) \mapsto (\xi_1, -\xi_2) \times \tau_1,$$

$$r_{23} : (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times (\tau_1, \tau_2) \mapsto (\xi_2, \xi_3) \times \tau_2,$$

$$r_{13} : (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times (\tau_1, \tau_2) \mapsto (\xi_1, \xi_3) \times (\tau_1 + \tau_2).$$

其中 $(\tau_1, \tau_2) = (t, \tau_1, \tau_2) \in T^*I \times_I T^*I$, 尽管有一点符号滥用, 但我们还是这样做.
于是

$$\begin{aligned} & \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \\ &= \{(\xi_1, \xi_3, \tau) \in T^*(M_{13} \times I) : \exists (\xi_2, \tau_1, \tau_2) \in T^*M_2 \times (T^*I \times_I T^*I), \\ & \text{使得, } (\xi_1, -\xi_2, \tau_1) \in \Lambda_1, (\xi_2, \xi_3, \tau_2) \in \Lambda_2\}. \end{aligned}$$

同样做假设,

$$\begin{cases} a) \text{supp}(\mathcal{K}_1) \times_{M_2 \times I} \text{supp}(\mathcal{K}_2) \rightarrow M_{13} \times I \text{逆紧,} \\ b) (p_{12^a I^a}^{-1}(\Lambda_1) \cap p_{23I}^{-1}(\Lambda_2)) \cap (0_{M_1} \times T^*M_2 \times 0_{M_3} \times T^*I) \subset 0_{M_{123} \times I}. \end{cases}$$

其中,

$$\begin{aligned} p_{12^a I^a} : T^*M_1 \times T^*M_2 \times T^*M_3 \times T^*I &\rightarrow T^*M_1 \times T^*M_2 \times T^*I, \\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, u) &\mapsto (\xi_1, -\xi_2, -u). \end{aligned}$$

则类似之前的讨论, 有相对卷积的上界公式

$$SS(\mathcal{K}_1 \circ_I \mathcal{K}_2) \subset SS(\mathcal{K}_1) \circ_I SS(\mathcal{K}_2).$$

例 2.3.4 (例2.3.1 的相对版本).

令 $M_1 = M, M_2 = M, M_3 = N$,

$$\circ_I : D^b(M \times M \times I) \times D^b(M \times N \times I) \rightarrow D^b(M \times N \times I).$$

特别地, 令 $\mathcal{K}_1 = k_{\Delta \times I} \in D^b(M \times M \times I); \mathcal{K}_2 = K \in D^b(M \times N \times I)$. 此时

$$\begin{aligned} k_{\Delta \times I} \circ_I \mathcal{K} &= R(q_{13I}!) \left(q_{12I}^{-1} k_{\Delta \times I} \overset{L}{\otimes} q_{23I}^{-1} \mathcal{K} \right) \\ &\cong R(q_{13I}!) \left(k_{\Delta \times N \times I} \overset{L}{\otimes} q_{23I}^{-1} \mathcal{K} \right) \\ &\cong R(q_{13I}!) \left(k_{\Delta \times N \times I} \overset{L}{\otimes} q_{13I}^{-1} \mathcal{K} \right) \\ &\cong (R(q_{13I}!) k_{\Delta \times N \times I}) \overset{L}{\otimes} \mathcal{K} \\ &\cong k_{M \times N \times I} \overset{L}{\otimes} \mathcal{K} \\ &\cong \mathcal{K}. \end{aligned}$$

同理, 对 $M_1 = N, M_2 = M, M_3 = M$ 也有

$$- \circ_I k_{\Delta \times I} \simeq \text{id} : D^b(N \times M \times I) \rightarrow D^b(N \times M \times I).$$

例 2.3.5 (相对卷积的结合性). 设有流形 $M_i, i = 1, 2, 3, 4$. $\mathcal{K}_i \in D^b(M_{i,i+1} \times I), i = 1, 2, 3$, 则有

$$(\mathcal{K}_1 \circ_I \mathcal{K}_2) \circ_I \mathcal{K}_3 \cong \mathcal{K}_1 \circ_I (\mathcal{K}_2 \circ_I \mathcal{K}_3).$$

同例 2.3.3

2.4 层的局部有界导出范畴

本节介绍层的局部有界范畴, 我们在后面做到层的粘和时, 必须要工作在这个范畴里. 本节可以参考 [10, §1.7]

定义 2.4.1. 设 $F^\bullet \in D(M) = D(\text{Sh}_k(M))$. 如果对任何 $U \subset M$ 开, 且 \bar{U} 紧, 有 $F^\bullet|_U \in D^b(U)$, 则称 F^\bullet 是局部有界的.

令 $D^{lb}(M)$ 表示 $D(M)$ 的有局部有界上同调的对象组成的全子范畴. 我们称其为层的局部有界导出范畴.

显然, 有界导出范畴 $D^b(M)$ 是局部有界导出范畴 $D^{lb}(M)$ 的一个全子范畴, 并且如果 $F^\bullet \in D^{lb}(M)$, 且 $\text{supp}(F^\bullet)$ 紧, 则实际上有 $F^\bullet \in D^b(M)$.

由于局部有界是一个局部性质, 所以我们在 2.1, 2.2, 2.3 节的所有和局部性质有关的定义和性质都是可行的. 特别的, 奇异支撑可以对局部有界的层 (的复形) 定义.

除此之外, Grothendieck 6 函子中, 除了直接像函子 Rf_* , 其余皆可以轻而易举的延拓至局部有界导出范畴. 对于此, 由于本文感兴趣的问题皆落入下列情形: $f : M \rightarrow N$, 且 f 在 $\text{supp}(F^\bullet)$ 上逆紧, 从而, $Rf_* F^\bullet \cong Rf_! F^\bullet$. 因此, 直接像的问题并不会影响我们的讨论. 特别地, 定理 2.2.2 对局部有界层仍然成立.

特别地, 在 1.3 节中, 我们是假设做卷积的层满足一定条件, 以归结至上述情形. 于是乎卷积运算对局部有界导出范畴封闭

$$\circ_{M_2} : D^{lb}(M_{12}) \times D^{lb}(M_{23}) \rightarrow D^{lb}(M_{13}).$$

且上界公式

$$SS(\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2) \subset SS(\mathcal{K}_1) \circ SS(\mathcal{K}_2).$$

仍然成立.

对我们而言, 层的局部有界导出范畴最重要的是下述两个命题, 它为我们提供了粘和层的工具.

命题 2.4.1. 设 $U_1, U_2 \subset M$ 为两个开集, $U_{12} = U_1 \cap U_2$. 令 $F_\alpha \in D(U_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, 且有同构 $\varphi_{12} : F_1|_{U_{12}} \rightarrow F_2|_{U_{12}}$. 则存在 $F \in D(U_1 \cup U_2)$ 和同构 $\varphi_\alpha : F|_{U_\alpha} \rightarrow F_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ 使得 $\varphi_{12} = \varphi_2|_{U_{12}} \circ \varphi_1|_{U_{12}}^{-1}$. 进一步, 三元组 $(F, \varphi_1, \varphi_2)$ 在相差 (不唯一的) 同构的意义下是唯一的.

证明. 对 $*$ = 1, 2, 12, 记 i_* 表示嵌入 $i_* : U_* \rightarrow U_1 \cup U_2$.

j_α 表示嵌入 $j_\alpha : U_{12} \rightarrow U_\alpha$. $\alpha = 1, 2$

由伴随性有自然同构

$$\mathrm{Hom}(i_{12!}(F_1|_{U_{12}}), i_{\alpha!}F_\alpha) \cong \mathrm{Hom}(F_1|_{U_{12}}, F_\alpha|_{U_{12}}), \alpha = 1, 2.$$

所以 φ_{12} 和 $\mathrm{id}_{F_1|_{U_{12}}}$ 定义了态射

$$u : i_{12!}(F_1|_{U_{12}}) \rightarrow i_{2!}F_2, \quad v : i_{12!}(F_1|_{U_{12}}) \rightarrow i_{1!}F_1.$$

于是考虑映射锥 $F = \mathrm{Cone}(u \oplus v)$ 从而有正合三角

$$i_{12!}(F_1|_{U_{12}}) \rightarrow i_{2!}F_2 \oplus i_{1!}F_1 \rightarrow F \xrightarrow{+1}.$$

于是, 由于 i_1^{-1} 是三角函子, 所以限制在 U_1 上, 有正合三角

$$j_{1!}(F_1|_{U_{12}}) \rightarrow j_{1!}(F_2|_{U_{12}}) \oplus F_1 \rightarrow F|_{U_1} \xrightarrow{+1}.$$

然而, 直和诱导了正合三角与态射 $j_{1!}(\varphi_{12})$ 给出了如下交换图. 并且, 根据 TR3, 存在态射 ψ 填充了此图.

$$\begin{array}{ccccc} j_{1!}(F_1|_{U_{12}}) & \rightarrow & j_{1!}(F_2|_{U_{12}}) \oplus F_1 & \rightarrow & F|_{U_1} \xrightarrow{+1} \\ \downarrow \mathrm{id} & & \uparrow j_{1!}(\varphi_{12}) & & \uparrow \psi \\ j_{1!}(F_1|_{U_{12}}) & \rightarrow & j_{1!}(F_1|_{U_{12}}) \oplus F_1 & \rightarrow & F_1 \xrightarrow{+1} \end{array}$$

所以, 由于前两个竖直映射同构, 则有 ψ 是同构, 并记 $\varphi_1 = \psi^{-1}$.

同理, 存在正合三角的交换图与同构 φ_2 :

$$\begin{array}{ccccc}
 j_{2!}(F_1|_{U_{12}}) & \rightarrow & F_2 \oplus j_{2!}(F_1|_{U_{12}}) & \rightarrow & F|_{U_2} \xrightarrow{+1} \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \varphi_2 \\
 j_{2!}(F_1|_{U_{12}}) & \rightarrow & F_2 \oplus j_{2!}(F_1|_{U_{12}}) & \rightarrow & F_2 \xrightarrow{+1}
 \end{array}$$

最后, 将两图限制到 U_{12} 上, 并将两个交换图合并, 于是根据交换性有, $\varphi_{12} = \varphi_2|_{U_{12}} \circ \varphi_1|_{U_{12}}^{-1}$. 同构的不唯一性是 TR3 导致的. □

命题 2.4.2. 令 $i_n : U_n \rightarrow M$ 是上升开集列, 并且 $\cup_n U_n = M$. 如果有一列层的正向系统 $F_n \in D^{lb}(U_n)$, 带上同构 $u_{n+1}^n : F_n \rightarrow F_{n+1}|_{U_n}$. 则存在 $F \in D^{lb}(M)$, 与一族同构 $u_n : F|_{U_n} \rightarrow F_n$, 使得 $u_{n+1}^n = u_{n+1} \circ u_n^{-1}$. 且 $(F, \{u_n\})$ 在相差 (不唯一) 的同构的意义下唯一.

证明. 令 $i_{n+1}^n : U_n \rightarrow U_{n+1}$ 为显然的包含, 且 $i_n = i_{n+1} \circ i_{n+1}^n$.

由伴随性有自然同构

$$\text{Hom}(i_{n+1}^n F_n, F_{n+1}) \cong \text{Hom}(F_n, F_{n+1}|_{U_n}),$$

于是 $u_{n+1}^n : F_n \rightarrow F_{n+1}|_{U_n}$ 确定了一个态射

$$(u_{n+1}^n)' : i_n! F_n \rightarrow F_{n+1}.$$

紧接着, 再用 $i_{n+1}!$, 则有

$$v_n = i_{n+1}! (u_{n+1}^n)' : i_{n+1}! i_n! F_n \cong i_n! F_n \rightarrow i_{n+1}! F_{n+1}.$$

于是我们得到了 $D^{lb}(M)$ 中层的正向系统 $(i_n! F_n, v_n)$. 考虑态射

$$v := \oplus_n (\text{id}_{i_n! F_n} - v_n) : \oplus_n i_n! F_n \rightarrow \oplus_n i_n! F_n$$

令 $F = \text{Cone}(v)$, 通常称之为正向系统 $(i_n! F_n, v_n)$ 的同伦余极限, 作为一个映射锥, 它在导出范畴里当然是在相差不唯一的同构的意义下唯一的. 并且, 我们有正合三角

$$\oplus_n i_n! F_n \xrightarrow{v} \oplus_n i_n! F_n \rightarrow F \xrightarrow{+1}$$

类似命题 2.4.1, TR3 告诉我们 u_n 的存在性. □

第 3 章 层的 Morse 理论

本章的目标是证明下述引理, 并介绍它的推论, 尤其是介绍它在 Arnold 非异置问题上应用的雏形. 本章的主要参考文献是 [6, §1.12, §5.4]

定理 (层的 Morse 引理). 设 $F^\bullet \in D^b(M)$, $h \in C^1(M)$, 且 h 在 $\text{supp}(F^\bullet)$ 上逆紧. 令 $M_t = \{x : h(x) < t\}$.

对 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 若 $dh(x) \notin SS(F^\bullet)$ 对 $a \leq h(x) < b$ 成立, 则限制态射 $R\Gamma(M_a, F^\bullet) \rightarrow R\Gamma(M_b, F^\bullet)$ 是同构

注意到, 如果取 $F^\bullet = k_M$, 则根据 $SS(k_M) = 0_M$ 就得到了通常的 Morse 引理.

我们将从 1 维的情况开始, 并运用函子关系, 得到高维的情形.

3.1 1 维的 Morse 引理

令 $F^\bullet \in D^b(M)$, $j : U \subset M$ 是开集. 则如我们在命题 1.2.1 中证明过的意义, 有层复形的正合三角

$$R\Gamma_{U^c}(F^\bullet) \rightarrow F^\bullet \rightarrow Rj_*j^{-1}F^\bullet \xrightarrow{+1}.$$

紧接着, 再使用限制函子 $(-)|_{\bar{U}} \cong Ri_*i^{-1}, i : \bar{U} \subset M$, 有正合三角

$$R\Gamma_{U^c}(F^\bullet)|_{\bar{U}} \rightarrow F^\bullet|_{\bar{U}} \rightarrow Rj_*j^{-1}F^\bullet \xrightarrow{+1}.$$

这里仍用 j 来表示, $j : U \subset \bar{U}$.

特别地, 将这个正合三角运用到一维的情况, 将是我们本节的起点.

命题 3.1.1 (层在区间上的传播). 令 $F^\bullet \in D^b(\mathbb{R})$, $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间.

设 $SS(F^\bullet) \cap T^*I \subset 0_I$. 则对 $\forall a < b$ 有自然同构

$$R\Gamma((\infty, b), F^\bullet) \xrightarrow{\cong} R\Gamma((\infty, a), F^\bullet)$$

证明. 先陈述两条断言:

$$A_i : \forall s \in I, \varinjlim_{\varepsilon \rightarrow 0} H^i((\infty, s + \varepsilon), F^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^i((\infty, s), F^\bullet).$$

$$B_i : \forall s \in I, H^i((\infty, s), F^\bullet) \xrightarrow{\cong} \varprojlim_{\varepsilon \rightarrow 0} H^i((\infty, s - \varepsilon), F^\bullet).$$

我们将在后面证明它们. 现在, 假设 $\exists i \in \mathbb{Z}$, A_i, B_i 成立, 来证明命题的第 i 个同调处成立.

取 $u \in \ker(H^i((\infty, b), F^\bullet) \rightarrow H^i((\infty, a), F^\bullet))$, 令

$$S = \{a \leq s \leq b : u \text{ 在 } H^i((\infty, s), F^\bullet) \text{ 中的限制为 } 0\}.$$

首先, 根据 u 的取法, 知 S 是非空. 根据 A_i , 如果 u 限制到 (∞, s_0) 上是 0, 那么限制在 $(\infty, s_0 + \varepsilon)$ 上也是 0, 于是 S 是开集. 如果 S 不闭, 则 u 在 (∞, s_0) , $s_0 = \sup S$ 上不消失. 然而, 根据 B_i , 这会导致 u 在 $(\infty, s_0 - \varepsilon)$ 上消失, 这就与 s_0 的定义矛盾了. 于是 S 闭, 从而 $S = [a, b]$, 进而 $u = 0$, 即 $H^i((\infty, b), F^\bullet) \rightarrow H^i((\infty, a), F^\bullet)$ 单.

同理, 取 $u \notin \text{Im}(H^i((\infty, b), F^\bullet) \rightarrow H^i((\infty, a), F^\bullet))$, 令

$$S' = \{a \leq s \leq b : u \text{ 不在到 } H^i((\infty, s), F^\bullet) \text{ 的像集中}\}.$$

则亦可利用 A_i, B_i 证明 S' 闭, 则 u 不在 $\text{id} : H^i((\infty, b), F^\bullet) \rightarrow H^i((\infty, b), F^\bullet)$ 的像里, 然而这就非常荒谬了! 说明, 一开始取的 u 就不存在. 即 $H^i((\infty, b), F^\bullet) \rightarrow H^i((\infty, a), F^\bullet)$ 满.

综上, $H^i((\infty, b), F^\bullet) \rightarrow H^i((\infty, a), F^\bullet)$ 是双射, 我们将这个双射称为断言 C_i .

下面来证明, 开始提到的断言 A_i, B_i , 对任何 $i \in \mathbb{Z}$ 成立.

令 $U = (s, \infty)$, $j : U \rightarrow \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 运用本节最初提到的正合三角, 有

$$R\Gamma_{[s, \infty)}(F^\bullet) |_{(\infty, s]} \rightarrow F^\bullet |_{(\infty, s]} \rightarrow Rj_* j^{-1} F^\bullet \xrightarrow{+1}.$$

再用整体截面函子 $R\Gamma(\mathbb{R}, -)$, 并注意到存在复合函子的自然同构

$$R\Gamma(\mathbb{R}, -) \circ R\Gamma_{[s, \infty)}() |_{(\infty, s]} \cong (R\Gamma_{[s, \infty)}(-))_s,$$

$$R\Gamma(\mathbb{R}, -) \circ (-) |_{(\infty, s]} \cong R\Gamma((\infty, s], -),$$

$$R\Gamma(\mathbb{R}, -) \circ Rj_* j^{-1}(-) \cong R\Gamma((\infty, s), -).$$

于是, 有正合三角

$$(R\Gamma_{[s, \infty)}(F^\bullet))_s \rightarrow R\Gamma((\infty, s], F^\bullet) \rightarrow R\Gamma((\infty, s), F^\bullet) \xrightarrow{+1}.$$

根据条件, 若 $s \in I$, 则 $(R\Gamma_{[s, \infty)}(F^\bullet))_s \cong 0$ 于是有导出范畴里的同构

$$R\Gamma((\infty, s], F^\bullet) \xrightarrow{\cong} R\Gamma((\infty, s), F^\bullet).$$

取同调, 则有

$$H^i((\infty, s], F^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^i((\infty, s), F^\bullet).$$

然而, 在层的范畴里, 有函子的自然同构

$$\Gamma((\infty, s], -) \cong \varinjlim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma((\infty, s + \varepsilon), -).$$

则通过对 F^\bullet 取松层消解, 可知, 在导出并取同调后仍有这样的极限同构

$$\varinjlim_{\varepsilon \rightarrow 0} H^i((\infty, s + \varepsilon), F^\bullet) \cong H^i((\infty, s], F^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^i((\infty, s), F^\bullet).$$

即 A_i 对任何 $i \in \mathbb{Z}$ 成立.

接下来考察 B_i , 此处需对 i 进行归纳. 由于 F^\bullet 是有界复形, 于是不妨设 $F^d \cong 0, d < 0$. 于是乎, 对 $i = 0$,

$$H^0((\infty, s), F^\bullet) = \Gamma((\infty, s), F^0) \cong \varprojlim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma((\infty, s - \varepsilon), F^0) = \varprojlim_{\varepsilon \rightarrow 0} H^0((\infty, s - \varepsilon), F^\bullet).$$

成立. 则得到了归纳起点.

现在, 假设 B_{i-1} 成立. 回顾 C_i 的证明知, 此时, C_{i-1} 已经得证, 所以我们接下来的任务是, $C_{i-1} \Rightarrow B_i$

取 F^\bullet 的松层消解 I^\bullet , 令

$$M_n^\bullet = R\Gamma\left((\infty, s - \frac{1}{n}), F^\bullet\right) = \Gamma\left((\infty, s - \frac{1}{n}), I^\bullet\right).$$

. 则我们得到了一个复形的投射系统

$$M_n^\bullet : \cdots \rightarrow M_n^{j-1} \rightarrow M_n^j \rightarrow M_n^{j+1} \rightarrow \cdots.$$

且对每个 $j \in \mathbb{Z}$, 投射系统 $\{M_n^j\}_n$ 满足 Mittag-Leffler 条件, 即对固定的 n , $\text{im}(M_p^j \rightarrow M_n^j), p \geq n$ 稳定. 此处, 由于 F^j 是松层, 则以上映射均为满射, ML 条件自动成立.

另外, 对 M_n^\bullet 取极限, 则得到极限复形

$$\varprojlim_n M_n^\bullet =: M_\infty^\bullet : \cdots \rightarrow M_\infty^{j-1} \rightarrow M_\infty^j \rightarrow M_\infty^{j+1} \rightarrow \cdots.$$

且由于极限态射 $M_n^\bullet \rightarrow M_\infty^\bullet$ 是链映射, 于是存在诱导态射

$$\varphi_i : H^i(M_\infty^\bullet) \rightarrow \varprojlim_n H^i(M_n^\bullet).$$

注意到, 按照现在的记号:

$$H^i(M_n^\bullet) = H^i\left(\Gamma\left(\left(\infty, s - \frac{1}{n}\right), I^\bullet\right)\right) = H^i\left(\left(\infty, s - \frac{1}{n}\right), F^\bullet\right),$$

$$H^i(M_\infty^\bullet) = H^i(\Gamma((\infty, s), I^\bullet)) = H^i((\infty, s), F^\bullet).$$

于是, 条件 C_{i-1} 则告诉我们, φ_{i-1} 是双射.

则同调模的投射系统 $\{H^i(M_n^\bullet) \cong H^i((\infty, s - \frac{1}{n}), F^\bullet)\}_n$ 满足 ML 条件.

因此利用下面的引理, 就完成了证明. \square

引理 3.1.1. 如果有复形的投射系统 $\{M_n^\bullet\}$, 使得对每个 j , $\{M_n^j\}$ 满足 ML 条件, 那么

- 1) 对每个 i , 诱导态射 $\varphi_i : H^i(M_\infty^\bullet) \rightarrow \varprojlim_n H^i(M_n^\bullet)$ 是满射
- 2) 进一步, 如果还对某个 i 有投射系统 $\{H^{i-1}(M_n^\bullet)\}_n$ 满足 ML 条件, 则诱导态射 φ_i 是双射

本引理的证明是纯代数的, 可参考 [6, 命题 1.12.4] \square

3.2 Morse 引理的证明及其推论

事实上, 对我们而言, 1 维的情形是本质的, 高维情形不过是函子运算的一个简单推论.

定理 3.2.1 (层的 Morse 引理). 设 $F^\bullet \in D^b(M)$, $h \in C^1(M)$, 且 h 在 $\text{supp}(F^\bullet)$ 上逆紧. 令 $M_t = \{x : h(x) < t\}$.

对 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 若 $dh(x) \notin SS(F^\bullet)$ 对 $a \leq h(x) < b$ 成立, 则限制态射 $R\Gamma(M_a, F^\bullet) \rightarrow R\Gamma(M_b, F^\bullet)$ 是同构

证明. 由于 h 在 $\text{supp}(F^\bullet)$ 上逆紧, 则可以使用逆紧基变换定理.

记 $i_t : (\infty, t) \rightarrow \mathbb{R}$, $j_t : M_t \rightarrow M$, 则由基变换, 有

$$Rh_*j_t^{-1}F^\bullet \cong i_t^{-1}Rh_*F^\bullet \in D^b(\mathbb{R}).$$

于是再应用 $R\Gamma(\mathbb{R}, -)$, 就有自然同构

$$R\Gamma(M_t, F^\bullet) \cong R\Gamma((\infty, t), Rh_*F^\bullet).$$

和交换图

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(M_b, F^\bullet) & \xrightarrow{\cong} & R\Gamma((\infty, a), Rh_*F^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma(M_b, F^\bullet) & \xrightarrow{\cong} & R\Gamma((\infty, a), Rh_*F^\bullet) \end{array}$$

其中, 各竖直映射恰为限制态射.

然而, 根据奇异支撑的函子性 (仍注意到 h 在 $\text{supp}(F^\bullet)$ 上逆紧),

$$SS(Rh_*F^\bullet) \subset h_\pi(dh^*)^{-1}(SS(F^\bullet))$$

并且, 经过计算, 我们的条件 $dh(x) \notin SS(F^\bullet)$ 对 $a \leq h(x) < b$ 恰好为

$$h_\pi(dh^*)^{-1}(SS(F^\bullet) \cap T^*[a, b] \subset 0_{[a, b]}).$$

于是根据 1 维的情形, 即 3.1.1, 我们得到交换图第二列是同构. 从而第一列亦然. \square

下面, 我们来介绍一些 Morse 引理的推论.

推论 3.2.1. 设 $F^\bullet \in D^b(M)$, 且 $SS(F^\bullet) \subset 0_M$, 则 $\forall i \in \mathbb{Z}, \mathcal{H}^i(F^\bullet)$ 同构于局部常值层.

证明. 固定 $x_0 \in M$. 在 M 上取一个黎曼度量, 从而诱导了一个函数 $h(x) = d^2(x, x_0)$, 自然 h 是逆紧的.

另外, 只要 $R > 0$ 充分小, 则 h 在 $B(x_0, R) = \{x \in M : d(x, x_0) < R\} = M_R$ 上只有 x_0 一个临界点.

于是 $\forall \varepsilon \in (0, R)$, 根据 Morse 引理 3.2.1, 有同构

$$H^i(B(x_0, R), F^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^i(B(x_0, \varepsilon), F^\bullet).$$

特别地, 取正向极限 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则

$$H^i(B(x_0, R), F^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^i(F^\bullet)_{x_0}.$$

于是 $\mathcal{H}^i(F^\bullet)$ 是局部常值层. \square

推论 3.2.2. 令 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个开区间, $q: M \times I \rightarrow I$ 为投影. 令 $F^\bullet \in D^b(M \times I)$, 满足

$$SS(F) \cap 0_M \times T^*I \subset 0_{M \times I}, \text{ 且 } q \text{ 在 } \text{supp}(F^\bullet) \text{ 上逆紧.}$$

若令 $F_a^\bullet = F^\bullet|_{M \times \{a\}}$, 则 $R\Gamma(M, F_a^\bullet) \cong R\Gamma(M, F_b^\bullet), a, b \in I$

证明. 首先, 注意到, 根据函子运算, 我们的条件恰好为 $SS(Rq_*F^\bullet) \subset 0_I$. 于是, 根据上面的推论3.2.1, Rq_*F^\bullet 在 $D^b(I)$ 中同构于一个 I 上的局部常值层的复形. 然而, I 是可缩的, 于是其上的局部常值层皆为常值层. 故存在 $M^\bullet \in D^b(\mathbf{k}\text{-Mod})$, 使得 $Rq_*F^\bullet \cong M_I^\bullet$

于是, 只需根据逆紧基变换, 则有

$$R\Gamma(M, F_a^\bullet) \cong (Rq_*)_a \cong M^\bullet \cong (Rq_*)_b \cong R\Gamma(M, F_b^\bullet), a, b \in I.$$

□

接下来的推论, 在 Arnold 非异置问题中起到了非常本质的作用, 所以我们在这里特地陈述如下.

推论 3.2.3. 设 $F^\bullet \in D^b(M)$, $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^1 函数. 记 L_h 为 h 的微分的图像, 即

$$L_h = \{(x, dh(x)) : x \in M\}.$$

现在假设:

- 1) $\text{supp}(F^\bullet)$ 是紧的,
- 2) $R\Gamma(M, F^\bullet) \neq 0$.

则 $L_h \cap SS(F) \neq \emptyset$.

证明. 反证: 假设 $L_h \cap SS(F) = \emptyset$. 稍作翻译, 就知道, 这个条件恰在说明 $dh(x) \notin SS(F^\bullet), x \in M$. 加之 $\text{supp}(F^\bullet)$ 是紧的. 则 Morse 引理3.2.1告诉我们: $R\Gamma(M_t, F^\bullet)$ 不随时间改变! 其中 $M_t = \{x : h(x) < t\}$.

然而, $\text{supp}(F^\bullet)$ 是紧的. 则通过取内射消解, 有

$$\begin{aligned} R\Gamma(M_t, F^\bullet) &\cong 0, t \ll 0, \\ R\Gamma(M_t, F^\bullet) &\cong R\Gamma(M, F^\bullet), t \gg 0. \end{aligned}$$

于是这两条与 $R\Gamma(M, F^\bullet) \neq 0$ 矛盾! □

此推论, 可以在非异置问题上起到了本质的作用. 我们将在第三章看到这一点.

3.3 Morse 不等式

在本节, 将假设 k 为一个域.

设 C^\bullet 是一个 k 向量空间的有界复形. 于是, 记

$$b_i(C^\bullet) = \dim_k H^i(C^\bullet), \quad b_l^*(C^\bullet) = (-1)^l \sum_{i \leq l} (-1)^i b_i(C^\bullet).$$

则有简单的关系

$$b_i(C^\bullet) = b_i^*(C^\bullet) + b_{i-1}^*(C^\bullet), \forall i \in \mathbb{Z}; \quad b_{2n}^*(C^\bullet) = \chi(C^\bullet), n \gg 0.$$

取 C^1 函数 $h: M \rightarrow \mathbb{R}$, $L_h = \{(x, dh(x))\}$ 为 dh 的图像. 令 $F^\bullet \in D^b(M)$.

假设

$$L_h \cap SS(F^\bullet) = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}.$$

并令

$$\forall s \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad x_s = \pi_M(\xi_s), \quad V_s = (R\Gamma_{\{h \geq h(x_s)\}} F^\bullet)_{x_s}.$$

最后假设,

$$\forall s \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall i \in \mathbb{Z}, H^i(V_s) \text{ 有限维.}$$

则有 Morse 不等式,

定理 3.3.1. 在上述假设下, 并假设 h 在 $\text{supp}(F^\bullet)$ 上逆紧. 则有

$$b_l^*(F^\bullet) \leq \sum_{s=1}^N b_l^*(V_s), l \in \mathbb{Z}.$$

其中, $b_i(F^\bullet) = b_i(R\Gamma(M, F^\bullet))$, $b_l^*(F^\bullet) = b_l^*(R\Gamma(M, F^\bullet))$

特别的, 有

$$b_i(F^\bullet) \leq \sum_{s=1}^N b_i(V_s), i \in \mathbb{Z}.$$

本定理的证明可见 [6, 命题 5.4.20] 与 [29]

第 4 章 微局部层论在辛几何中的应用

本章旨在回顾辛几何的基本概念, 并介绍微局部层论, 尤其是层量子化, 是如何被运用到辛几何中的.

4.1 辛几何的基本概念

本节主要回顾一些辛几何的基本概念, 读者可以参考教科书 [30]

定义 4.1.1. 设 X 是光滑流形, $\omega \in \Omega^2(X)$,

- 1) 如果 ω 是非退化的, 即 $\forall x \in X, \omega_x$ 是 $T_x M$ 上的非退化双线性函数, 且 $d\omega = 0$. 则称 ω 为 X 上一个辛形式.
- 2) 如果 ω 是 X 上一个辛形式. 则称 (X, ω) 为一个辛流形.
- 3) 如果 ω 是恰当的, 则称辛流形 $(X, \omega = d\alpha)$ 为一个恰当辛流形.

注记. 1) 如果 (X, ω) 是辛流形, 则 $(X, -\omega)$ 是辛流形. 如果没有混淆, 通常将 ω 省略记为 X , 并将 $(X, -\omega)$ 简记为 \bar{X} .

2) 由 ω 的非退化性知, X 的实维数一定是偶数 $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$.

3) ω 非退化当且仅当 $\omega^n \neq 0$, 于是辛流形上有天然的定向和体积形式. 特别地, 若 X 闭流形 (紧无边流形), 则 $H^{2i}(X, \mathbb{R}) \neq 0, i = 0, 1, \dots, n$. 因此, 恰当辛流形一定不是闭流形.

例 4.1.1 (辛向量空间).

令 $X = \mathbb{R}^{2n}$, 其坐标为 $(x^i, p_i) \in \mathbb{R}^{2n}$. 令 $\alpha = \sum_i p_i dx^i, \omega = d(-\alpha) = \sum_i dx^i \wedge dp_i$. 则 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ 为恰当辛流形.

例 4.1.2 (余切丛).

设 M 为光滑流形. 令 $X = T^*M$, 取定局部坐标 (x^i, p_i) , 令 $\alpha_M = \sum_i p_i dx^i$, 则直接验证有 α_M 是整体定义的 1-形式, 称之为 Liouville 形式. 则 $\omega_M = d(-\alpha_M)$ 是辛形式, (T^*M, ω_M) 为恰当辛流形. 如果没有混淆, 我们一般省略掉角标 M . 局部上 $\omega = \sum_i dx^i \wedge dp_i$.

例 4.1.3 (Kahler 流形).

设 (X, h) 是 Hermite 流形, 则其有基本形式 $\omega = \text{Im}(h) \in \Omega^2(X, \mathbb{R})$, 由于 h 是 Hermite 度量, 则 ω 非退化. 于是若 (X, h) 是 Kahler 的, 即 $d\omega = 0$, 则 (X, ω) 是辛流形.

特别地, 若 $Y \rightarrow X$, 是 Kahler 流形 (X, h) 的复子流形, 则由于 $di^*\omega = i^*d\omega = 0$, 于是 $(Y, i^*\omega)$ 是 Kahler 的. 下述两例是此事实应用中的具体体现:

1. 复向量空间 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 上带有标准的 Kahler 度量 $\omega = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_i dz^i \wedge d\bar{z}^i = \sum_i dx^i \wedge dy_i$, 其中 $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$. 则其为 Kahler, 且其复子流形 (Stein 流形) 都是 Kahler 流形, 特别地, 光滑的仿射代数簇都是 Kahler 流形.
2. 射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 上具有 Fubini-Study 度量 $\omega_{FS} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log(\|z\|^2)$, 使得其成为 Kahler 流形. 其复子流形 (射影流形) 都是 Kahler 流形.

例 4.1.4 (乘积流形).

如果有两个辛流形 $(X_1, \omega_1), (X_2, \omega_2)$. 考虑乘积流形 $X_1 \xleftarrow{p_1} X_1 \times X_2 \xrightarrow{p_2} X_2$, 和 2-形式 $\omega_1 \times \omega_2 := p_1^*\omega_1 + p_2^*\omega_2$. 则由于

$$d(\omega_1 \times \omega_2) = d(p_1^*\omega_1 + p_2^*\omega_2) = p_1^*d\omega_1 + p_2^*d\omega_2 = 0.$$

且由于两个非退化双线性形式的直和仍然非退化, 知 $(X_1 \times X_2, p_1^*\omega_1 + p_2^*\omega_2)$ 是辛流形.

特别地, 若 (X, ω) 是辛流形, 则 $\bar{X} \times X := (X \times X, \omega \times (-\omega))$ 是辛流形.

由于辛形式 ω 为非退化双线性形式. 则它诱导了下述的同构

$$\begin{aligned} TX &\xrightarrow{\cong} T^*X, \\ \mathcal{X}(X) &\xrightarrow{\cong} \Omega^1(X), \\ V &\mapsto \iota_V\omega. \end{aligned}$$

于是乎, 我们可以定义一些特殊的向量场.

定义 4.1.2. 若 (X, ω) 是辛流形,

- 1) 对任何函数 $H \in C^\infty(X)$, 存在向量场 V_H 使得 $\iota_{V_H}\omega = -dH$. 则称 V_H 为函数 H 的哈密顿向量场.

2) 若向量场 V 满足 $d\iota_V\omega = 0$, 则称 V 为辛向量场. 特别地, 所有的哈密顿向量场都是辛向量场.

根据 Cartan 公式, $\mathcal{L}_V = d\iota_V + \iota_V d$. 则 V 是辛向量场当且仅当, $\mathcal{L}_V\omega = 0$, 辛向量场得名于此.

于是, 如果 V 是一个流 $\varphi_s : X \rightarrow X$ 的生成元, 即 $\frac{d\varphi_s}{ds} = V \circ \varphi_s, \varphi_0 = \text{id}_M$, 则 V 是辛向量场当且仅当 $\varphi_s^*\omega = \omega$. 基于此, 我们有以下概念:

定义 4.1.3. 设 $(X, \omega), (X', \omega')$ 为两个辛流形. $\varphi : X \rightarrow X'$ 微分同胚.

- 1) 若 $\varphi^*\omega' = \omega$, 则称 φ 为辛态射. 群 $\text{Symp}(X, \omega) = \{\varphi \in \text{Diff}(X) : \varphi^*\omega = \omega\}$ 是称为 (X, ω) 的辛同构群.
- 2) 若一个辛同构的光滑族 (即辛同痕) $\varphi_s : X \rightarrow X, \varphi_0 = \text{id}_M$, 有生成元 V_s , 即有方程 $\frac{d\varphi_s}{ds} = V_s \circ \varphi_s$, 则 V_s 均为辛向量场. 特别地, 若 $\forall s \in \mathbb{R}, V_s = V_{H_s}$ 是哈密顿向量场, 其中 $H : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, H_s = H(-, s)$ 是光滑函数. 则称 φ_s 是哈密顿同痕.
- 3) 若 φ 是辛同构, 且存在哈密顿同痕 φ_s 使得 $\varphi = \varphi_1$, 则称 φ 为哈密顿态射. 且可以验证 $\text{Ham}(X, \omega) = \{\varphi \in \text{Diff}(X) : \varphi \text{ 是哈密顿态射}\}$ 是 $\text{Symp}(X, \omega)$ 的子群, 称为哈密顿群.

注记. 值得注意的是, 如果 $H_{dR}^1(X) = 0$, 那么辛同痕都是哈密顿同痕.

例 4.1.5. 设 \mathbb{R}^{2n} 带上标准辛形式成为辛流形.

线性辛同构 $\text{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}) : \varphi^*\omega = \omega\}$, 当然是辛同构. 并且, 由于 $H_{dR}^1(\mathbb{R}^{2n}) = 0$, 于是它们也都是哈密顿的.

例 4.1.6 (余切丛). 设 M 为光滑流形. 令 $X = T^*M, (X, -d\alpha)$ 为标准的辛结构.

设 $\psi \in \text{Diff}(M)$, 考虑余切映射的逆

$$\Psi : T^*M \rightarrow T^*M, (x, p) \mapsto (\psi(x), (df_x^*)^{-1}(p)).$$

局部上, $\alpha = \sum_i p_i dx^i$,

$$\begin{aligned}\Psi^*\alpha &= \sum_i (d\psi^*)^{-1}(p_i) d\psi^i \\ &= \sum_i \left(\left(\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial \psi^i} p_k \right) \left(\sum_j \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j} dx^j \right) \right) \\ &= \sum_{j,k} \left(\sum_i \frac{\partial x^k}{\partial \psi^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j} \right) p_k dx^j \\ &= \sum_{j,k} \delta_j^k p_k dx^j \\ &= \sum_j p_j dx^j = \alpha.\end{aligned}$$

于是, $\Psi^*\omega = -d\Psi^*\alpha = -d\alpha = \omega$. 即 $\Psi \in \text{Symp}(T^*M, -d\alpha)$.

另外, 设 $h \in C^\infty(M)$, $H = \pi_M^*h$, $\pi_M : T^*M \rightarrow M$. 考虑同痕,

$$\varphi_s : T^*M \rightarrow T^*M, (x, p) \mapsto (x, p + sdh(x)),$$

则其生成元为 $V_s = \sum_i s \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p^i}$. 且

$$\iota_{V_s}\omega = \sum_{ij} s \frac{\partial h}{\partial x^i} \left(\iota_{\frac{\partial}{\partial p^i}} dx^j \wedge dp_j \right) = - \sum_{ij} s \frac{\partial h}{\partial x^i} \delta_{ij} dp_j = - \sum_i s \frac{\partial h}{\partial x^i} dx^i = -d(sH).$$

因此, φ_s 是哈密顿同痕, 其哈密顿函数为 sH .

最后, 我们需要讨论一些辛流形的子流形.

定义 4.1.4. 设 (X, ω) 为辛流形, $i : S \rightarrow X$ 为浸入 (嵌入). 则 i^*TX 是 S 上的辛向量丛, 且以 TS 为子丛. 考虑辛正交补 $TS^\perp = \{V \in i^*TX : \omega(V, W) = 0, \forall W \in TS\}$.

- 1) 若 $TS \subset i^*TX$ 为子辛向量丛, 则称 i 为辛浸入 (嵌入).
- 2) 若 $TS \subset TS^\perp$, 则称 i 为迷向浸入 (嵌入). i 迷向当且仅当 $i^*\omega = 0$.
- 3) 若 $TS^\perp \subset TS$, 则称 i 为拉格朗日浸入 (嵌入).
- 4) 若 $TS = TS^\perp$, 则称 i 为拉格朗日浸入 (嵌入).

$$i \text{ 拉格朗日} \iff i \text{ 迷向且余迷向} \iff i^*\omega = 0, \text{ 且 } 2 \dim_{\mathbb{R}} Y = \dim_{\mathbb{R}} X.$$

- 5) 若还有 $(X, d\alpha)$ 是恰当辛流形, i 是一个拉格朗日浸入 (嵌入), 于是 $d(i^*\alpha) = 0$. 则如果 $i^*\alpha = df, \exists f \in C^\infty(S)$, 则称 i 是恰当拉格朗日浸入 (嵌入).

例 4.1.7. 设 \mathbb{R}^{2n} 带上标准辛形式成为恰当辛流形, $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ 是线性子空间.

则

W 是辛嵌入 $\iff W$ 是辛子空间

W 是迷向嵌入 $\iff W$ 是迷向子空间

W 是余迷向嵌入 $\iff W$ 是余迷向子空间

W 是拉格朗日嵌入 $\iff W$ 是拉格朗日子空间

且此时, 由于 $H_{dR}^1(W) = 0$, 则若 W 是拉格朗日嵌入, 则 W 一定是恰当拉格朗日嵌入.

例 4.1.8 (余切丛). 设 M 为光滑流形. 令 $X = T^*M$, $(X, -d\alpha)$ 为余切丛上的恰当辛结构.

1) 设 $\gamma: M \rightarrow T^*M$ 是一个 1-形式.

局部上, 设 $\gamma: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, \gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x))$, $\alpha = \sum_i p_i^d x^i$.

则 $\gamma^*\alpha = \sum_i \gamma_i(x) dx^i = \gamma$.

于是 1-形式 γ 是拉格朗日嵌入当且仅当 γ 闭, 是恰当拉格朗日当且仅当 γ 恰当.

2) 另外, 设 $i: S \subset M$ 是子流形. 定义余法从 $T_S^*M := \text{Ker}(T^*M \xrightarrow{di^*} T^*S)$.

如果, S 局部上由 $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ 定义, 则知 T_S^*M 局部上由 $x_{k+1} = \dots = x_n = p_1 = \dots = p_k = 0$ 定义.

于是 $\dim_{\mathbb{R}} T_S^*M = n$, 且 $\alpha|_{T_S^*M} = 0$.

从而余法从 T_S^*M 是 $X = T^*M$ 的恰当拉格朗日子流形.

特别地, 余切空间都是 $X = T^*M$ 的恰当拉格朗日子流形 (只需取 $S = \{x\}$), $x \in M$.

例 4.1.9. 设 (X, ω) 是辛流形, $\varphi: X \rightarrow X$ 是微分同胚.

考虑 $\text{Graph}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in X\}$. 则

$$(-\omega) \times \omega|_{\text{Graph}(\varphi)} = \varphi^*\omega - \omega.$$

于是

$\varphi: X \rightarrow X$ 是辛同构 $\iff \text{Graph}(\varphi)$ 是 $\bar{X} \times X$ 的拉格朗日子流形.

4.2 余切丛的齐次辛几何和 Tamarkin 锥技巧

上一节我们回顾了辛几何的一些基本概念, 并提供了充分多的示例. 现在我们要回到我们的正题, 正如第一章 Kashiwara 定理指出的那样, 任何层 (的复形) 的奇异支撑是 \mathbb{R}_+ 不变的余迷向子集. 所以我们希望将这一想法倒过来实现, 我们希望找到特定的层, 使得特定的几何对象, 如拉格朗日子流形, 哈密顿同痕的图像, 能包含这些层的奇异支撑. 这就是所谓的层量子化方法. 然而一个显著的问题是, 奇异支撑是 \mathbb{R}_+ 不变, 所以, 这要求我们的几何对象也有相应的 \mathbb{R}_+ 不变性. 于是我们必须研究齐次辛几何.

同时, 我们也需要一系列技巧, 将 (非齐次) 辛几何的问题转换成齐次辛几何的问题. 这一系列技巧源于 D. Tamarkin [7], 故此我们将其称之为 Tamarkin 锥技巧.

鉴于本文不会讨论超出余切丛, 我们将只讨论余切丛的齐次辛几何. 特别地, $T^*M = T^*M \setminus 0_M$. 将其称为去心余切丛.

注记. 齐次辛几何本质上是切触几何, 但是为了避免过多技术名词和同意反复, 我们将不会提及齐次辛几何和切除几何的对应关系. 可参考 [31].

接下来, 设 (X, ω) 是辛流形, I 是一个包含 0 的区间.

设 $\varphi : X \times I \rightarrow X$ 是一个辛同痕, 记 $\varphi_s = \varphi(-, s)$, 则例 4.1.9 告诉我们, 其图像 $\text{Graph}(\varphi_s) \subset \overline{X} \times X$ 是一个拉格朗日子流形.

令 $\text{Graph}(\varphi) = \{(x, \varphi_s(x), s) \in X \times X \times I\}$, 我们希望找到一个 $\overline{X} \times X \times T^*I$ 的拉格朗日子流形 L_φ 使得, $\text{id}_{\overline{X} \times X} \times \pi_I : L_\varphi \xrightarrow{\cong} \text{Graph}(\varphi)$. 如果这样的拉格朗日子流形存在, 我们将其称为 φ 的增广图 $L_\varphi = \text{ExGraph}(\varphi)$.

命题 4.2.1. [10, 引理 A.1] $\varphi : X \times I \rightarrow X$ 是一个辛同痕, 则 φ 存在增广图 $\text{ExGraph}(\varphi) \subset \overline{X} \times X \times T^*I$ 使得 $\text{id}_{\overline{X} \times X} \times \pi_I : \text{ExGraph}(\varphi) \xrightarrow{\cong} \text{Graph}(\varphi)$ 当且仅当 φ 是哈密顿同痕. 此时, 增广图有如下表达式

$$\text{ExGraph}(\varphi) = \{(x, \varphi(x, s), s, -H(\varphi(x, s), s)) : x \in X, s \in I\}.$$

其中, $H : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ 是 φ 的哈密顿函数, 且 H 在相差一个只与 s 有关的函数的意义下唯一.

证明. 接下来我们总是自然等同 $T^*I \cong I \times \mathbb{R}$.

由于增广图需要满足 $\text{id}_{\overline{X} \times X} \times \pi_I : \text{ExGraph}(\varphi) \xrightarrow{\cong} \text{Graph}(\varphi)$.

则不妨设

$$\text{ExGraph}(\varphi) = \{(x, \varphi(x, s), s, \sigma(x, s)) : x \in X, s \in I\}.$$

其中 σ 是一个 $X \times I$ 上的光滑函数. 下面来考察, 何时这个子流形会是拉格朗日的. 事实上, 维数条件自动成立, 于是只需验证迷向条件. 令 $(x, s) \in X \times I$, $P = (x, \varphi(x, s), s, \sigma(x, s)) \in \text{ExGraph}(\varphi)$. 则其切空间 $T_P \text{ExGraph}(\varphi)$ 由下列向量生成:

$$U_0 = (0, V_\varphi, 1, d\tau(\frac{\partial}{\partial s})), \quad U_W = (W, d\varphi_s(W), 0, d\tau_s(W)), \forall W \in T_x X$$

因为 φ_s 是辛态射, 所以 $\text{Span}(U_W), \forall W \in T_x X$ 迷向. 于是, $\text{ExGraph}(\varphi)$ 是拉格朗日当且仅当, $\omega_P(U_0, U_W) = 0, \forall W \in T_x X$, 即

$$\begin{aligned} 0 &= ((-\omega) \times \omega \times \omega_I)_P(U_0, U_W) \\ &= -\omega_x(0, W) + \omega_{\varphi(x,s)}(V_\varphi, d\varphi_s(W)) + (\omega_I)_{(t,\sigma)}((1, d\sigma(\frac{\partial}{\partial t})), 0, d\sigma_s(W)) \\ &= \omega_{\varphi(x,s)}(V_\varphi, d\varphi_s(W)) - d\sigma_s(W) \\ &= \iota_{V_\varphi} \omega(d\varphi_s(W)) - d(\sigma_s \circ \varphi_s^{-1})(d\varphi_s(W)) \\ &= (\iota_{V_\varphi} \omega - d(\sigma_s \circ \varphi_s^{-1}))(d\varphi_s(W)). \end{aligned}$$

由于, $d\varphi_s$ 是线性同构, 则上式即 $\iota_{V_\varphi} \omega = d(\sigma_s \circ \varphi_s^{-1})$. 其中 $H = -\sigma_s \circ \varphi_s^{-1}$ 就是想要的哈密顿函数.

综上, $\text{ExGraph}(\varphi)$ 是拉格朗日当且仅当 φ 是哈密顿同痕. \square

现在, 回到余切丛的状况.

以下总约定余切丛 T^*M 带上标准辛形式 $\omega = -d\alpha$ 成为辛流形. 去心余切丛 \dot{T}^*M 则作为余切丛的开子集成为辛流形.

另外, 对径映射 $a : T^*M \rightarrow T^*M, (x, p) \mapsto (x, -p)$, 满足 $a^*\alpha = -\alpha$. 于是, φ 给出了 T^*M 与 $\overline{T^*M}$ 之间的辛同构. 于是我们总是用 a 把 T^*M 与 $\overline{T^*M}$ 视为等同. 进而, $a \times \text{id}_{T^*M} : \overline{T^*M} \times T^*M \rightarrow T^*(M \times M)$ 是辛同构.

并且, 对 $A \subset T^*M, B \subset \overline{T^*M} \times T^*M$, 分别记 $A^a = a(A), B^a = a \times \text{id}_{T^*M}(B)$.

以上约定在 \dot{T}^*M 上也自然地有意义.

在这些约定下: 微分同胚 $\varphi : T^*M \rightarrow T^*M$ 是辛同构, 当且仅当 $\text{Graph}(\varphi)^a$ 是 $T^*(M \times M)$ 的拉格朗日子流形. 此时, 若 φ_s 还是哈密顿同痕, 则其增广图也

应该被等同为 $\text{ExGraph}(\varphi)^a := a \times \text{id}_{T^*M} \times \text{id}_{T^*I}(\text{ExGraph}(\varphi))$. 我们将仍然称 $\text{Graph}(\varphi)^a, \text{ExGraph}(\varphi)^a$ 为图和增广图.

注意到, T^*M 上有自然的 \mathbb{R}_+ 作用, 由 $\lambda(x, p) = (x, \lambda p)$ 给出. 此作用是自由且恰当的, 其无穷小生成元恰为 (逐纤维的) *Euler* 向量场 $eu_M := \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$, 其满足 $\iota_{eu_M} \omega = -\alpha$.

定义 4.2.1. 设 $\varphi: \dot{T}^*M \rightarrow \dot{T}^*M$ 是辛同构. 如果 φ 是 \mathbb{R}_+ 等变的, 则称 φ 是齐次辛同构. 如果一个辛同痕 φ_s 对每个 $s \in I$, 都是齐次辛同构, 则称其为齐次辛同痕.

命题 4.2.2. [10, 引理 A.2] 设 $\varphi: \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是齐次辛同痕, 则

- 1) $\varphi_s^* \alpha = \alpha$, φ_s 是哈密顿同痕, 且哈密顿函数 H_s 是逐纤维的一次齐次函数.
- 2) φ 的增广图 $\text{ExGraph}(\varphi)^a$ 是 \mathbb{R}_+ 不变的.
- 3) $\text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{M \times M \times I}$ 在 $T^*(M \times M \times I)$ 中闭. 且嵌入 $i_s: M \times M \rightarrow M \times M \times I$ 对 $\text{ExGraph}(\varphi)^a$ 非特征. $\text{Graph}(\varphi_s)^a = \text{ExGraph}(\varphi)^a \circ T_s^* I$.

证明. 1) 首先验证 $\varphi_s^* \alpha = \alpha$. 由于 φ_s 和 \mathbb{R}_+ 作用可交换, 于是 $d\varphi_s(eu_M) = eu_M, \forall s \in \mathbb{R}_+$. 则

$$\varphi_s^* \alpha = -\varphi_s^*(\iota_{eu_M} \omega) = -\iota_{(d\varphi_s)^{-1}(eu_M)}(\varphi_s^* \omega) = -\iota_{eu_M} \omega = \alpha.$$

于是接下来, 令 V_s 为 φ_s 生成元, 由 Cartan 公式,

$$0 = \mathcal{L}_{V_s} \alpha = \iota_{V_s} d\alpha + d\iota_{V_s} \alpha \Rightarrow \iota_{V_s} \omega = d\iota_{V_s} \alpha.$$

于是, 令 $H_s = -\iota_{V_s} \alpha = \alpha(V_s)$, 则 H_s 是 φ 的哈密顿函数. 为了验证 H_s 是逐纤维的一次齐次函数, 只需考虑欧拉场在其上的作用. 事实上,

$$\begin{aligned} eu_M(H_s) &= eu_M(-\alpha(V_s)) \\ &= -d\alpha(eu_M, V_s) - V_s(\alpha(eu_M)) - \alpha([eu_M, V_s]) \\ &= \omega(eu_M, V_s) \\ &= \iota_{eu_M}(V_s) = -\alpha(V_s) = H_s. \end{aligned}$$

其中, $\alpha(eu_M) = \iota_{eu_M} \alpha = -\iota_{eu_M} \iota_{eu_M} \omega = 0$; 且由于 φ_s 和 \mathbb{R}_+ 作用交换, 于是 $[eu_M, V_s] = 0$.

2) 事实上, 根据命题 4.2.1, 我们知道增广图可被取为

$$\text{ExGraph}(\varphi)^a = \{(x, -p, \varphi(x, p, s), s, -H(\varphi(x, p, s), s)) : (x, p) \in X, s \in I\}$$

于是, 若 $(x, -p, \varphi(x, p, s), s, -H(\varphi(x, p, s), s)) \in \text{ExGraph}(\varphi)^a, \lambda \in \mathbb{R}_+$, 则

$$\begin{aligned} & \lambda(x, -p, \varphi(x, p, s), s, -H(\varphi(x, p, s), s)) \\ &= (x, -\lambda p, \lambda \varphi(x, p, s), s, -\lambda H(\varphi(x, p, s), s)) \\ &= (x, -\lambda p, \varphi(x, \lambda p, s), s, -H(\varphi(x, \lambda p, s), s)) \in \text{ExGraph}(\varphi)^a. \end{aligned}$$

即 $\text{ExGraph}(\varphi)^a$ 是 \mathbb{R}_+ 不变的.

3) 用坐标 $(x, x', p, p', s, \sigma) \in T^*(M \times M) \times T^*I$, 设 $Q_n = (x_n, x'_n, p_n, p'_n, s_n, \sigma_n) \in \text{ExGraph}(\varphi)^a$ 是一个收敛到 $Q \in \overline{\text{ExGraph}(\varphi)^a}$ 的序列. 不妨设, 这些点在一个紧子集中.

然而, 根据 $\text{ExGraph}(\varphi)^a$ 定义, $|\sigma_n| = |H_s(\varphi_s(x_n, p_n))|$, 我们可以得到如下的估计,

$$|\sigma_n| \leq D|p_n|, \quad 1/D|p_n| \leq |p'_n| \leq D|p_n|.$$

其中 D 是一个常数. 于是, 若 $Q \notin \dot{T}^*M \times \dot{T}^*M \times T^*I$, 则 $\sigma = 0$, 从而 $Q \in 0_{M \times M \times I}$.

因此, $\text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{M \times M \times I}$ 在 $T^*(M \times M \times I)$ 中闭.

接下来, 由于 φ 是去心余切丛之间的光滑映射, 则 $\text{ExGraph}(\varphi)^a \cap 0_M \times T^*I = \emptyset$. 其中 $0_M \times T^*I = \ker(di_t^*)$ 于是因为空命题永远是真的, 则 i_t 非特征.

最后, 回顾卷积的定义 (2.3), 令 $M_1 = M \times M, M_2 = I, M_3 = \{\text{pt}\}$, $\text{ExGraph}(\varphi)^a \subset T^*M_{12}, T_s^*I \subset T^*M_{23}$, 则

$$\begin{aligned} & \text{ExGraph}(\varphi)^a \circ T_s^*I \\ &= \{(x, p, x, p') \in T^*(M \times M) : (x, -p, \varphi_s(x, p), s, \sigma) \in \text{ExGraph}(\varphi)^a, \text{且 } (s, \sigma) \in T^*I\} \\ &= \{(x, -p, \varphi_s(x, p)) \in T^*(M \times M)\} = \text{Graph}(\varphi_s)^a. \end{aligned}$$

□

下面介绍 Tamarkin 锥技巧. 这一技巧帮助我们将非齐次的辛几何问题翻译为齐次辛几何的问题.

这里我们需要先引进一个额外变量. 令 $(t, \tau) \in \dot{T}^*\mathbb{R}$, $\alpha_{\mathbb{R}} = \tau dt$ 为 $\dot{T}^*\mathbb{R}$ 的 Liouville 形式. 并记 $T_{\tau>0}^*\mathbb{R} = \{(t, \tau) : \tau > 0\}$, $T_{\tau>0}^*(M \times \mathbb{R}) = T^*M \times T_{\tau>0}^*\mathbb{R}$.

定义锥映射

$$C : T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R} \rightarrow T^*M, (x, p, t, \tau) \mapsto (x, p/\tau).$$

哈密顿同痕情形

令 $\varphi : T^*M \times I \rightarrow T^*M$ 是哈密顿同痕 (不必齐次), 其哈密顿函数为 $H : T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$. 令 $\hat{H} := \tau C^*H$, 则它是 $T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R}$ 上的一次 (逐纤维) 齐次函数.

命题 4.2.3. [10, 引理 A.6] 令 $\varphi : T^*M \times I \rightarrow T^*M$ 是哈密顿同痕, 其哈密顿函数为 H . $\hat{H} = \tau C^*H$ 如上. 则

- 1) 存在齐次哈密顿同痕 $\hat{\varphi} : T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R} \times I \rightarrow T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R}$, 其哈密顿函数为 \hat{H} . 且有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} T_{\tau>0}^*(M \times \mathbb{R}) \times I & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & T_{\tau>0}^*(M \times \mathbb{R}) \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R} \times I & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R} \\ \downarrow C \times \text{id}_I & & \downarrow C \\ T^*M \times I & \xrightarrow{\varphi} & T^*M \end{array}$$

且存在一个光滑函数 $u : T^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\hat{\varphi}(x, p, t, \tau, s) = (\tau \cdot \varphi_s(x, p/\tau), t + u(x, p/\tau, s), \tau).$$

- 2) 若 φ 紧支撑, 则 $\hat{\varphi}$ 可以延拓到 $\hat{\varphi} : \dot{T}^*(M \times \mathbb{R}) \times I \rightarrow \dot{T}^*(M \times \mathbb{R})$ 使得

$$\hat{\varphi}(x, p, t, 0, s) = (x, p, t + v(s), 0).$$

我们将 $\hat{\varphi}$ 称为 φ 的锥提升.

证明. 1) 根据 $\hat{\varphi}$ 的表达式, 它当然是齐次的, 且若它存在, 则图的交换性是自明的. 于是只需验证, 存在 u 使得 \hat{H} 是 $\hat{\varphi}$ 的哈密顿函数.

设 $p : T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R} \rightarrow \dot{T}^*\mathbb{R}$, $(x, p, t, \tau) \mapsto (t, \tau)$, 则 $\psi = (C, p)$ 定义了微分同胚 (容易找到它的逆):

$$\psi : T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R} \rightarrow T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R}.$$

于是, $\forall q = (x, p, t, \tau) \in T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R}$, 切映射定义同构

$$d\psi_q = dC_q \times dp_q : T_q(T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R}) \rightarrow T_{(x,p/\tau)}(T^*M) \oplus T_{(t,\tau)}(\dot{T}^*\mathbb{R}).$$

且有

$$\alpha_{M \times \mathbb{R}} = \tau C^* \alpha_M + p^* \alpha_{\mathbb{R}},$$

$$\omega_{M \times \mathbb{R}} = \tau C^* \omega_M + p^* \omega_{\mathbb{R}} + d\tau \wedge C^* \alpha_M.$$

令 $V_{\hat{H}}$ 为 \hat{H} 决定的哈密顿向量场, 即 $\iota_{V_{\hat{H}}} \omega_{M \times \mathbb{R}} = -d\hat{H}$. 在 q 点处, 将 $V_{\hat{H}}$ 用上述同构作一个分解, 记为

$$V_{\hat{H}} = V_M + V_{\mathbb{R}}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iota_{V_{\hat{H}}} \omega_{M \times \mathbb{R}} &= \tau \iota_{V_M} C^* \omega_M + \iota_{V_M} p^* \omega_{\mathbb{R}} + \iota_{V_M} (d\tau \wedge C^* \alpha_M) \\ &\quad + \tau \iota_{V_{\mathbb{R}}} C^* \omega_M + \iota_{V_{\mathbb{R}}} p^* \omega_{\mathbb{R}} + \iota_{V_{\mathbb{R}}} (d\tau \wedge C^* \alpha_M) \\ &= (\tau \iota_{V_M} C^* \omega_M + (\iota_{V_{\mathbb{R}}} d\tau) C^* \alpha_M) + (\iota_{V_{\mathbb{R}}} p^* \omega_{\mathbb{R}} - (\iota_{V_M} C^* \alpha_M) d\tau). \end{aligned}$$

另一方面, 因为 $\hat{H} = \tau C^* H$, 于是

$$d\hat{H}_s = \tau C^* dH_s + C^* H_s d\tau.$$

则根据 $\iota_{V_{\hat{H}}} \omega_{M \times \mathbb{R}} = -d\hat{H}$, 对比得到

$$-C^* dH_s = \iota_{V_M} C^* \omega_M + \tau^{-1} (\iota_{V_{\mathbb{R}}} d\tau) C^* \alpha_M,$$

$$-C^* H_s d\tau = \iota_{V_{\mathbb{R}}} p^* \omega_{\mathbb{R}} - (\iota_{V_M} C^* \alpha_M) d\tau.$$

注意, 这里的第二个等式应当不含 dt 项, 于是 $V_{\mathbb{R}} = f \frac{\partial}{\partial t}$, f 是一个光滑函数. 所以, $\iota_{V_{\mathbb{R}}} d\tau = 0$. 所以, 再根据第一个等式, 有 $V_M = V_{H_s}$. 此时, 再带入第二式, 有 $f = C^*(H_s - \alpha_M(V_{H_s}))$. 令 $g_s = H_s - \alpha_M(V_{H_s})$, 则

$$V_{\hat{H}_s} = V_{H_s} + C^* g_s \frac{\partial}{\partial t}.$$

令 $u : T^*M \times I$ 是下述常微分方程的解

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} = g_s \circ \varphi_s, & , \\ u = 0, & s = 0. \end{cases}$$

则直接验证, 如取这个 u 知 $\widehat{\varphi}$ 的生成元是 $V_{\widehat{H}}$. 即得到了想要的齐次哈密顿同痕.

- 2) 注意, 此处我们尚需补充定义的地方仅有 $T^*M \times 0_{\mathbb{R}}$. 此时, 由于 H_s 和 g_s 都在 φ 的支撑之外为 0. 于是, u_s 在 φ 的支撑之外为的值只与 s 有关, 记为 $v(s)$. 则直接按照 $\widehat{\varphi}(x, p, t, 0, s) = (x, p, t + v(s), 0)$ 延拓即可.

□

拉格朗日子流形情形

命题 4.2.4. [16, 引理 16.3] 设 $L \subset T^*M$ 是紧恰当拉格朗日子流形, 满足 $\alpha_M|_L = df$, $f \in C^\infty(L)$. 则存在闭 \mathbb{R}_+ 不变拉格朗日子流形 $\widehat{L} \subset T_{\tau>0}^*(M \times \mathbb{R})$, 使得

$$\begin{aligned} \widehat{L} &= C^{-1}(L) \cap \{t = -C^*f\} \\ &= \{(x, p, t, \tau) \in T_{\tau>0}^*(M \times \mathbb{R}) : (x, p/\tau) \in L, t = -f(x, p/\tau)\}. \end{aligned}$$

通常, 将 \widehat{L} 称为 L 的锥.

证明. 首先由于 C 是淹没, 则 $C^{-1}(L)$ 是一个光滑流形. 且注意到

$$C^{-1}(L) = \{(x, \tau p, t, \tau) : (x, p) \in L\} \rightarrow L \times \mathbb{R}_+, (x, \tau p, t, \tau) \mapsto (x, p, \tau)$$

是一个平凡实线丛, 于是 \widehat{L} 是它的一个截面的像, 从而微分同胚于 $L \times \mathbb{R}_+$ (这里要用到紧性来确保微分同胚), 因此是 $\widehat{L} \subset T_{\tau>0}^*(M \times \mathbb{R})$ 的 $\dim_{\mathbb{R}} L + 1$ 维子流形.

因此, 只需验证它迷向即可. 注意到

$$\alpha_{M \times \mathbb{R}} = \tau C^* \alpha_M + p^* \alpha_{\mathbb{R}}$$

其中 $p : T^*M \times \dot{T}^*\mathbb{R} \rightarrow \dot{T}^*\mathbb{R}$, $(x, p, t, \tau) \mapsto (t, \tau)$, 于是

$$\alpha_{M \times \mathbb{R}}|_{\widehat{L}} = \tau C^*(df) + (-\tau dC^*f) = 0$$

所以当然, \widehat{L} 是拉格朗日子流形. □

注记. 此命题可以有下述的逆命题: 若 $\widehat{L} \subset T_{\tau>0}^*(M \times \mathbb{R})$ 是一个闭的 \mathbb{R}_+ 不变拉格朗日子流形, 则 C 诱导了恰当拉格朗日嵌入 $L = \widehat{L}/\mathbb{R}_+ \hookrightarrow T^*M$, 则 L 恰当.

4.3 哈密顿同痕的层量子化

本节旨在介绍下面的定理, 并讨论它在余切丛的 Arnold 非异置问题和扭结不变量中的应用.

定理 4.3.1. [10, 定理 3.7, 命题 3.2] 令 $\varphi: \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是齐次哈密顿同痕. 则存在 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$, 使得

- 1) $SS(\mathcal{K}) \subset \text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{M \times M \times I}$,
- 2) $\mathcal{K}_0 = k_\Delta$.

其中 $\mathcal{K}_{s_0} = \mathcal{K}|_{\{s=s_0\}}$.

若设 $\mathcal{K}_s^{-1} = v^{-1}R\mathcal{H}om(\mathcal{K}_s, \omega_M \boxtimes^L k_M)$, $v(x, y) = (y, x)$, $x, y \in M$, 则还有

- a) $\text{supp}(\mathcal{K}) \rightrightarrows M \times I$ 分别是逆紧的,
- b) $\mathcal{K}_s \circ \mathcal{K}_s^{-1} \cong \mathcal{K}_s^{-1} \circ \mathcal{K}_s \cong k_\Delta$,
- c) \mathcal{K} 在相差唯一的同构的意义下唯一.

(此处的卷积由 $M_1 = M_2 = M_3 = M$ 计算)

我们称 \mathcal{K} 为齐次哈密顿同痕 φ 的 **层量子化**. 我们会在第四章证明它, 此处我们仅介绍它的应用.

Arnold 非异置问题-齐次情形

定理 4.3.2. [10, 定理 4.1] 令 $\varphi: \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是齐次哈密顿同痕, $h \in C^1(M)$ 没有临界点, $L_h = \{(x, dh(x)) : x \in M\} \subset \dot{T}^*M$ 是 h 微分的图像.

假设 $F_0 \in D^b(M)$ 具有紧支撑. 且 $R\Gamma(M, F_0) \neq 0$.

记 $\dot{SS}(F) := SS(F) \cap \dot{T}^*M$, $F \in D^{lb}(M)$, 则对 $\forall s \in I$, $\varphi_s(\dot{SS}(F_0)) \cap L_h \neq \emptyset$.

证明. 接下来, 令 $M_1 = \{\text{pt}\}$, $M_2 = M$, $M_3 = M \times I$, 下面对这些 M_i 做层的卷积.

令 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$ 是 φ 的层量子化. 定义

$$F = F_0 \circ \mathcal{K} \in D^{lb}(M \times I),$$

$$F_{s_0} = F|_{s=s_0} \cong F \circ k_{s=s_0} \cong F_0 \circ \mathcal{K}_{s_0} \in D^{lb}(M), s_0 \in I.$$

于是有

- 1) $SS(F) \subset (SS(F_0) \circ \text{ExGraph}(\varphi)^a) \cup 0_{M \times I}$,
- 2) $SS(F) \cap 0_M \times T^*I \subset 0_{M \times I}$,
- 3) $\text{supp}(F) \rightarrow I$ 逆紧,
- 4) F_s 在 M 中有紧支撑,
- 5) $\dot{SS}(F_s) = \varphi_s(\dot{SS}(F_0))$.

实际上,

- 1) 这是上界公式2.3的直接推论, 只验证以下条件.

a) 注意 $M_{12} \times_{M_2} M_{23} = \Delta_M \times I \rightarrow M \times I, (x, x, t) \rightarrow (x, t)$. 又 $\text{supp}(F_0)$ 紧, 于是 $\text{supp}(F_0) \times_M \text{supp}(\mathcal{K}) \rightarrow M \times I$ 是逆紧的.

b) 由于 φ 是 T^*M 上的辛同痕, 于是

$$(p_{12}^{-1}(SS(F_0)) \cap p_{23}^{-1}(\text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{M \times M \times I})) \cap (0_{M_1} \times T^*M_2 \times 0_{M_3}) \subset 0_{M_{123}}.$$

接下来直接应用上界公式即可.

- 2) 由于 $M_1 = \{\text{pt}\}$, 所以更进一步来说,

$$\begin{aligned} SS(F) &\subset SS(F_0) \circ SS(\mathcal{K}) \\ &\subset SS(F_0) \circ (\text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{M \times M \times I}) \\ &= \{\xi_3 \in T^*(M \times I) : \exists \xi_2 \in T^*M_2 \text{ 使得 } -\xi_2 \in SS(F_0) \\ &\quad \text{且 } (\xi_2, \xi_3) \in \text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{MMI}\} \\ &= \{(\varphi_s(x, p), s, \sigma) \in T^*(M \times I), (x, p) \in SS(F_0)\} \\ &\quad \cup \{(x, 0, s, 0) \in T^*(M \times I) : x \in \text{supp}(F_0)\}. \end{aligned}$$

因此, 直接观察有 $SS(F) \cap 0_M \times T^*I \subset 0_{M \times I}$.

- 3) 注意到, $\text{supp}(F) = SS(F) \cap 0_{M \times I}$. 于是根据上述公式, 有

$$\text{supp}(F) = \{(x, 0, s, 0) \in T^*(M \times I) : x \in \text{supp}(F_0)\} \cong \text{supp}(F_0) \times I.$$

则由于 F_0 紧支, 投影 $q : \text{supp}(F) \rightarrow I$ 自然是逆紧的.

4) 对固定的 $s_0 \in I$, $F_{s_0} \cong F \circ k_{s=s_0}$. 此处不难验证上界公式的条件. 于是有 $SS(F_{s_0}) \subset SS(F) \circ T_{s_0}^* I$. 特别地, 对 3) 中投影 q , 有 $\text{supp}(F_{s_0}) = q^{-1}(s_0)$. 于是, $\text{supp}(F_{s_0})$ 紧.

5) 如上, 对固定的 $s_0 \in I$, 有 $SS(F_{s_0}) \subset SS(F) \circ T_{s_0}^* I$. 于是根据 3) 中 $SS(F)$ 的表达式, 直接看出

$$\dot{SS}(F_{s_0}) \subset \varphi_{s_0}(\dot{SS}(F_0)).$$

而反包含则只需对 φ^{-1} 再重复一遍上述过程即可.

现在, 根据 4) 知 $F_s \in D^b(M)$. 所以上述 2), 3), 和第二章推论 3.2.2. 告诉我们 $R\Gamma(M, F_s) \cong R\Gamma(M, F_0) \neq 0$.

另外, 根据第二章命题 3.2.3, 有 $SS(F_s) \cap L_h \neq \emptyset$.

紧接着, 由于 5), $SS(F_s) \subset \varphi_s(SS(F_0) \cap \dot{T}^* M) \cup 0_M$,

则 $\varphi_s(\dot{SS}(F_0)) \cap L_h \supset SS(F_s) \cap L_h \neq \emptyset$. □

推论 4.3.1. [10, 推论 4.2] 令 $\varphi: \dot{T}^* M \times I \rightarrow \dot{T}^* M$ 是齐次哈密顿同痕, $h \in C^1(M)$ 没有临界点, 其图像 $L_h = \{(x, dh(x)) : x \in M\} \subset \dot{T}^* M$.

若 S 是 M 的非空紧子流形, $\dot{T}_S^* M := T_S^* M \cap \dot{T}^* M$ 为去心余法丛. 则 $\varphi_s(\dot{T}_S^* M) \cap L_h \neq \emptyset$

证明. 只需取 $F_0 = k_S$ 并用定理 4.3.2 即可. □

实际上, 在较好的相交情况下, 可以用 Morse 不等式得到交点个数的下界估计.

定理 4.3.3. [10, 定理 4.4] 设 k 为域. 令 $\varphi: \dot{T}^* M \times I \rightarrow \dot{T}^* M$ 是齐次哈密顿同痕, $h \in C^2(M)$ 没有临界点, $L_h = \{(x, dh(x)) : x \in M\}$ 是 h 微分的图像.

假设, $F_0 \in D^b(M)$ 具有紧支撑. 且存在 $\dot{SS}(F_0)$ 的光滑开子集 $\dot{SS}(F_0)_{reg}$, 使之成为拉格朗日子流形.

且假设 $\exists s_0 \in I$ 使得 $\varphi_{s_0}(\dot{SS}(F_0)) \cap L_h \subset \varphi_{s_0}(\dot{SS}(F_0)_{reg}) \cap L_h$, 并只有有限个横截的交点.

且 $\forall (x, p) \in \varphi_{s_0}(\dot{SS}(F_0)) \cap L_h$, $\exists d \in \mathbb{Z}$, $(R\Gamma_{\{h \geq h(x)\}}(F_0))_x \cong k[d]$

则

$$|\varphi_{s_0}(\dot{SS}(F_0)) \cap L_h| \geq \sum_i b_i(F_0).$$

证明. 在上面的定理4.3.2 的证明中, 我们已经看到了 $R\Gamma(M, F_s) \cong R\Gamma(M, F_0) \neq 0$, 从而 $b_i(F_s) = b_i(F_0), \forall s \in I, \forall i \in \mathbb{Z}$.

令 $\varphi_{s_0}(\dot{S}S(F_0)) \cap L_h = \{(x_1, p_1), \dots, (x_N, p_N)\}$, 并令

$$V_n = (R\Gamma_{\{h \geq h(x_n)\}}(F_0))_{x_n}, n = 1, \dots, N$$

于是根据假设, V_n 是有有限维上同调的有界复形.

于是根据第二章定理 4.1, 即 Morse 不等式, 有

$$\begin{aligned} \sum_i b_i(F_0) &\leq \sum_i \sum_n b_i(V_n) \\ &= \sum_n \sum_i b_i(V_n) \\ &= \sum_n 1 = N = |\varphi_{s_0}(\dot{S}S(F_0)) \cap L_h| \end{aligned}$$

其中第二个等号是因为条件告诉我们, 在同调意义上 V_n 实际上集中在一处. \square

乍看之下, 我们对层 F_0 施加了非常强的限制. 然而, 几何中自然出现的例子告诉我们, 这种假设并不苛刻. 下面就可以举一个例子.

推论 4.3.2. [10, 推论 4.5] 设 k 为域. 令 $\varphi: \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是齐次哈密顿同痕, $h \in C^2(M)$ 没有临界点, $L_h = \{(x, dh(x)) : x \in M\}$ 是 h 微分的图像.

假设, S 是 M 的紧子流形. 且 $\exists s_0 \in I$ 使得 $\varphi_{s_0}(\dot{T}_S^*M) \cap L_h$ 横截相交.

则

$$|\varphi_{s_0}(\dot{T}_S^*M) \cap L_h| \geq \sum b_i(S).$$

证明. 令 $F_0 = k_S$, 于是 $b_i(k_S) = b_i(S)$, 则为了应用上面的定理4.3.3, 只需验证

$$\forall (x, p) \in \varphi_{s_0}(\dot{T}_S^*M) \cap L_h, \exists d \in \mathbb{Z}, (R\Gamma_{\{h \geq h(x)\}}(k_S))_x \cong k[d].$$

这个计算需要一些关于简单层的基本性质, 读者可以直接参阅 [6, 例 7.5.5]. \square

Arnold 非异置问题-非齐次情形

对非齐次情形, 我们的策略是用 Tamarkin 锥技巧, 将非齐次问题转化成齐次问题. 并保持相交状况不变. 因此, 我们需要以下引理:

引理 4.3.1. [10, 引理 4.15] 令 $p: X \rightarrow Y$ 是淹没. $A, B \subset Y$ 是子流形, $A' \subset X$ 是子流形, 使得 $p|_{A'}: A' \rightarrow A$ 是微分同胚. 令 $B' = p^{-1}(B)$. 则

- 1) p 诱导了双射: $A' \cap B' \xrightarrow{\cong} A \cap B$.
- 2) A', B' 横截相交当且仅当 A, B 横截相交.

证明. 首先, 由于 $p|_{A'}: A' \rightarrow A$ 是微分同胚, 则限制在子集 $p: A' \cap B' \rightarrow A$ 也是双射. 于是只需说明 $p(A' \cap B') = A \cap B$. 事实上, 若 $x \in A' \cap B'$, 则存在 $y \in B$ 使得 $p(x) = y \in A$, 即 $p(A' \cap B') \subset A \cap B$, 同时若 $y \in A \cap B$, 由于 $p: A' \rightarrow A$ 是双射, 则存在唯一的 $x \in A'$ 使得 $p(x) = y$. 因为 $y \in B$, 则还有 $x \in B'$, 故 $x \in A' \cap B'$, 从而 $p(A' \cap B') \supset A \cap B$.

接下来, 取 $x \in A' \cap B', y := p(x) \in A \cap B$. 由于 p 是淹没, 则 $B' = p^{-1}(B)$ 是子流形, 且 B' 在 x 处的切空间为 $dp^{-1}(T_y B)$. 因为 $p|_{A'}: A' \rightarrow A$ 是微分同胚, 则 $dp_x: T_x A' \rightarrow T_y A$ 是同构. 于是

$$dp_x: T_x A' + T_x B' \mapsto T_y A + T_y B,$$

将使得

$$T_x A' + T_x B' = T_x X \iff T_y A + T_y B = T_y Y.$$

□

接下来, 我们用这个引理和前面齐次问题的结果来证明下述定理:

定理 4.3.4. [10, 定理 4.16] 设 M 是一个非空紧流形. $\varphi: T^*M \times I \rightarrow T^*M$ 是一个紧支撑哈密顿同痕. 则

$$\varphi_s(0_M) \cap 0_M \neq \emptyset, \forall s \in I.$$

且如果存在 $s_0 \in I$, 使得上述相交横截, 则

$$|\varphi_{s_0}(0_M) \cap 0_M| \geq \sum_i b_i(M).$$

证明. 令 $N = M \times \mathbb{R}$, 等同 M 和 $M \times \{0\}$, 设

$$\hat{\varphi}: \dot{T}^*N \times I \rightarrow \dot{T}^*N,$$

是命题 4.2.3 的锥提升.

取 $F_0 = k_M \in D^b(N)$, $h(x, p, t, \tau) = t$. 于是根据推论4.3.1, 4.3.2. 有 $\widehat{\varphi}_s(\dot{T}_M^*N) \cap L_h \neq \emptyset$, $s \in I$, 且如果在 $s_0 \in I$ 处相交横截, 则交点有下界估计

$$|\widehat{\varphi}_{s_0}(\dot{T}_M^*N) \cap L_h| \geq \sum b_i(M)$$

于是乎, 只需比较 $\widehat{\varphi}_s(\dot{T}_M^*N) \cap L_h$ 与 $\varphi_s(0_M) \cap 0_M$.

首先, 应用引理4.3.1至 $p : T^*M \times \mathbb{R}^\times \rightarrow T^*M, (x, p, \tau) = (x, p/\tau)$, $A = 0_M, B = \varphi_s(0_M), A' = 0_M \times \{1\}$, 显然它们满足引理条件.

令

$$\Sigma_s := B' = p^{-1}(B) = \{(\tau \cdot \varphi_s(x, 0), \tau) : x \in M, \tau \in \mathbb{R}^\times\}.$$

于是根据引理, $0_M \times \{1\} \cap \Sigma_s \xrightarrow{\cong} 0_M \cap \varphi_s(0_M)$ 是一一对应, 且两侧同时横截相交.

然后, 再次应用引理4.3.1至 $p : T^*M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \subset \dot{T}^*N \rightarrow T^*M \times \mathbb{R}^\times, (x, p, t, \tau) = (x, p, \tau)$, $A = \Sigma_s, B = 0_M \times \{1\}, A' = \widehat{\varphi}_s(\dot{T}_M^*N)$.

为了应用引理, 只需验证 p 诱导微分同胚 $\widehat{\varphi}_s(\dot{T}_M^*N) \rightarrow \Sigma_s$.

然而, 回顾定义, $\dot{T}_M^*N = \{(x, 0, 0, \tau) : x \in M, \tau \in \mathbb{R}^\times\}$, 且

$$\widehat{\varphi}_s(x, p, t, \tau) = (\tau \cdot \varphi_s(x, p/\tau), t + u(x, p/\tau, s), \tau), u \in C^\infty(T^*M \times I).$$

于是

$$\widehat{\varphi}_s(\dot{T}_M^*N) = \{(\tau \cdot \varphi_s(x, 0), u(x, 0, s), \tau) : x \in M, \tau \in \mathbb{R}^\times\}.$$

所以, 光滑映射

$$q_s : \Sigma_s \rightarrow \widehat{\varphi}_s(\dot{T}_M^*N), \quad (\tau \cdot \varphi_s(x, 0), \tau) \mapsto (\tau \cdot \varphi_s(x, 0), u(x, 0, s), \tau).$$

就给出了 $p|_{\widehat{\varphi}_s(\dot{T}_M^*N)}$ 的逆.

另一方面, 此时 $B = 0_M \times \{1\}$, $h(x, p, t, \tau) = t$, 显然有 $L_h = p^{-1}(B)$. 则引理4.3.1再次告诉我们

$$\widehat{\varphi}_{s_0}(\dot{T}_M^*N) \cap L_h \xrightarrow{\cong} 0_M \times \{1\} \cap \Sigma_{s_0} \xrightarrow{\cong} 0_M \cap \varphi_{s_0}(0_M).$$

三个集合一一对应, 且同时横截相交. □

扭结不变量

我们在本章例4.1.6中看到, 底流形 M 上的微分同胚 $\psi : M \rightarrow M$ 诱导了余切丛上的齐次辛同构 $\Psi : \dot{T}^*M \rightarrow \dot{T}^*M, (x, p) \mapsto (\psi(x), (d\psi_x^*)^{-1}(p))$, 从而得到了

哈密顿同构. 如果 $S \subset M$ 是子流形, 则 Ψ 把 \mathbb{R}_+ -拉格朗日子流形 \dot{T}_S^*M 映到 \mathbb{R}_+ -拉格朗日子流形 $\dot{T}_{\psi(S)}^*M$.

于是, 底流形的微分拓扑问题能够提升为余切丛上的辛拓扑问题 (事实上, 是齐次辛拓扑, 也就是切触拓扑的问题). 而对于提升后的辛拓扑问题, 哈密顿同痕的层量子化将给我们提供一个范畴化的不变量.

定理 4.3.5. 设 $\varphi: \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是一个齐次哈密顿同痕, 令 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$ 是其层量子化, 则层的卷积给出了范畴等价:

$$\circ\mathcal{K}_s: D^{lb}(M) \xrightarrow{\cong} D^{lb}(M).$$

此处的卷积由对 $M_1 = M_2 = M, M_3 = \{\text{pt}\}$ 做.

如果 $L \subset \dot{T}^*M$ 是一个 \mathbb{R}_+ -拉格朗日子流形. 令 $D_L^{lb}(M)$ 为 $D^{lb}(M)$ 的全子范畴, 其对象为 $\dot{S}S(F^\bullet) \subset L$ 的层 (的有界复形). 则此层卷积仍然给出范畴等价:

$$\circ\mathcal{K}_s: D_L^{lb}(M) \xrightarrow{\cong} D_{\phi_s(L)}^{lb}(M).$$

证明. 对第一个断言, 注意到层量子化满足 $\mathcal{K}_s \circ \mathcal{K}_s^{-1} \cong \mathcal{K}_s^{-1} \circ \mathcal{K}_s \cong k_\Delta$. 且 $k_\Delta \circ F \cong F \circ k_\Delta \cong F$, 则与 \mathcal{K}_s^{-1} 卷积给出了与 \mathcal{K}_s 卷积的伪逆.

对第二个断言, 回顾定理 3.2 的证明: 我们知道 $\dot{S}S(F \circ \mathcal{K}_s) \subset \phi_s(\dot{S}S(F) \subset \phi_s(L)$. 反过来, 这个结论对 ϕ_s^{-1} 与 \mathcal{K}_s^{-1} 亦然. 于是第一个等价诱导了第二个等价. \square

直接应用至去心余法丛, 则得到下述推论:

推论 4.3.3. 设 $S, S' \subset M$ 是两个子流形. $\varphi: \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是一个齐次哈密顿同痕, 使得 $\phi_1(\dot{T}_S^*M) = \dot{T}_{S'}^*M$. 令 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$ 是其层量子化, 则层的卷积给出了范畴等价:

$$\mathcal{K}_1 \circ: D_{\dot{T}_S^*M}^{lb}(M) \xrightarrow{\cong} D_{\dot{T}_{S'}^*M}^{lb}(M)$$

于是乎, 范畴 $D_{\dot{T}_S^*M}^{lb}(M)$ 完全由 \dot{T}_S^*M 的齐性哈密顿同痕类决定, 从而成为 \dot{T}_S^*M 的不变量.

一个更进一步的问题是, 这样的范畴, 多大程度上能决定 S 的微分拓扑? 这个问题至今仍然缺乏足够的理解, 但是在扭结上, 问题由 V.Shende 给出了解答 [14].

定理 4.3.6. [14, 定理 2] 对扭结 $K, K' \subset \mathbb{R}^3$, 如果存在一个齐性辛同痕 ϕ 使得 $\phi_1(\dot{T}_K^* \mathbb{R}^3) = \dot{T}_{K'}^* \mathbb{R}^3$. 则 K 和 K' 或者等价, 或者互为镜像.

尽管我们没有在定理陈述中看到范畴 $D_{T_S^* M}^{lb}(M)$, 但需要提及的是, 此范畴在定理的证明中起到了至关重要的作用. 我们不打算在此证明本定理, 感兴趣的读者可以参考 V.Shende 的原文 [14].

另外, 由于本文采取了齐次辛几何的语言, 所以使用了去心余法丛 $\dot{T}_S^* M$ 进行研究. 而 V.Shende 的文章中是用切触几何的语言, 所以他处理的是余法环面丛 $\mathbb{T}_S := \dot{T}_S^* M / \mathbb{R}_+$. 我们需要提醒读者, 这两者并没有本质上的区别.

4.4 紧恰当拉格朗日子流形的层量子化

我们已经看到了, 哈密顿同痕的量子化对很多经典的辛几何问题有很有趣的应用. 实际上, 齐性哈密顿同痕的层量子化本质上是哈密顿同痕的增广图, 作为一个恰当拉格朗日子流形的量子化. 所以自然要问, 任意的恰当拉格朗日子流形的层量子化是否存在, 有什么应用? Verbito 指出, 在一定的条件下, 这样的层量子化可以用 Floer 理论给出. 而 Guillermou[16] 则完全用微局部层论证了如下定理.

定理 4.4.1. [16, 定理 26.1] 设 $L \subset T^*M$ 是一个紧的恰当拉格朗日子流形, $\widehat{L} \subset T_{\tau>0}^*(M \times \mathbb{R})$ 是由命题 4.2.4 给出的拉格朗日锥. 则存在 $F \in D^b(M \times I)$ 使得

- 1) $\dot{S}S(F) = \widehat{L}$. 设 $F_{t_0} = F|_{\{t=t_0\}}$. 则若 $t \gg 0$, 有 $F_+ := F_t \cong k_M$; 若 $t \ll 0$, 有 $F_- := F_t \cong 0$
- 2) 1) 中的 F 在相差唯一同构的意义下唯一. 实际上如果还有另一个 $F' \in D^b(M \times I)$ 满足 1) 的条件, 则有 $R\text{Hom}(F, F') \cong R\text{Hom}(F_+, F'_+) \cong k$.
- 3) 投影 $\pi = \pi_M|_L : L \rightarrow M$, 诱导了同构 $R\Gamma(M, k_M) \cong R\Gamma(L, k_L)$.
- 4) 如果 k 是一个域, 投影 π 的逆向函子 $\pi^{-1} : \mathbf{Loc}(M) \rightarrow \mathbf{Loc}(L)$ 是范畴等价.
- 5) L 的 Maslov 类平凡.

其中 $\mathbf{Loc}(M)$ 表示 M 上的局部常值层的范畴. 我们将层 F 称为 L 的层量子化

其中 5) 曾由 Kraph[25] 证明.

由于 $\mathbf{Loc}(M) \simeq \mathbf{Fun}(\pi_1(M), \mathbf{k}\text{-Mod})$, 其中 $\pi_1(M)$ 为基本群胚. 如果再设 M 连通 (对 3) 取同调知 L 也连通), 则上述 4) 给出了基本群的同构 $\pi_* : \pi_1(L, x) \rightarrow \pi_1(M, \pi(x))$. 于是根据 Whitehead 定理知,

推论 4.4.1. 设 $L \subset T^*M$ 是一个紧的恰当拉格朗日子流形, 则投影 $\pi : L \rightarrow M$ 是同伦等价.

这个推论最早由 Fukaya 等 [26], Abouzaid[27] 用 Fukaya 范畴给出过. 这里, 借助层量子化, Guillermou 给出了一个纯层论证明 [16, 推论 26.3].

本定理是如此的优美, 作者难以割舍, 故列于此. 然而由于此定理的证明难度远超本文内容, 并且我们并不会本质用到这个定理, 作者就此略过其证明. 可以参考 Guillermou 的文章 [16].

第 5 章 哈密顿同痕的层量子化的存在性

本章将给出定理 4.3.1 的证明, 即如下定理. 本章的主要参考文献为 [10, §3].

定理. [10, 定理 3.7, 命题 3.2] 令 $\varphi: \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是齐次哈密顿同痕. 则存在 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$, 使得

- 1) $SS(\mathcal{K}) \subset \text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{M \times M \times I}$,
- 2) $\mathcal{K}_0 = k_\Delta$.

其中 $\mathcal{K}_{s_0} = \mathcal{K}|_{\{s=s_0\}}$.

若设 $\mathcal{K}_s^{-1} = v^{-1}R\mathcal{H}om(\mathcal{K}_s, \omega_M \boxtimes^L k_M)$, $v(x, y) = (y, x)$, $x, y \in M$, 则还有

- a) $\text{supp}(\mathcal{K}) \rightrightarrows M \times I$ 分别是逆紧的,
- b) $\mathcal{K}_s \circ \mathcal{K}_s^{-1} \cong \mathcal{K}_s^{-1} \circ \mathcal{K}_s \cong k_\Delta$,
- c) \mathcal{K} 在相差唯一的同构的意义下唯一.

(此处的卷积由 $M_1 = M_2 = M_3 = M$ 计算)

我们的证明策略为: 先在假设存在性的情况下证明上述 a), b), c), d), 特别地我们可以证明唯一性. 然后再对具有水平紧支撑的齐次哈密顿同痕证明存在性. 最后用逼近和唯一性粘和水平紧支撑情形的结果来得到一般结果. 我们将会在接下来的各节中逐步完成证明.

在本章中, 约定 $\varphi: \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是齐次哈密顿同痕, 其增广图 $\text{ExGraph}(\varphi)^a$ 简记为 Λ .

5.1 哈密顿同痕的层量子化的唯一性

先引入如下记号

$I_s = [0, s]$ 或 $[s, 0]$, 取决于 $s \in I$ 的符号

$B := \{(x, y, t) \in M \times M \times I : (\{x\} \times \{y\} \times I_s) \cap \dot{\pi}_{M \times M \times I}(\Lambda) \neq \emptyset\}$.

引理 5.1.1. [10, 引理 3.1] 投影 $B \rightrightarrows M \times I$, $(x, y, s) \mapsto (x, s)$ 或 (y, s) 都是逆紧的.

证明. 先来证第一个投影 $q : B \rightarrow M \times I, (x, y, s) \mapsto (x, s)$ 的情形. 根据 B 的定义, $q^{-1}(x, s) = \{x\} \times \dot{\pi}_M(\varphi(\dot{\pi}_M^{-1}(y) \times I_s)) \times \{s\}$ 于是对 $D \subset M$ 紧, $t \in I$,

$$q^{-1}(D \times I_s) \subset D \times \dot{\pi}_M(\varphi(\dot{\pi}_M^{-1}(D) \times I_s)) \times I_s.$$

是紧集. 对一般的 $J \subset I$, 则它一定处于一下两种情况 $J \subset I_s, \exists s \in I$, 或 $J \subset I_s \cup I_{s'}, \exists s, s' \in I$. 从而归结到上述情形.

第二个投影的情况跟第一个投影是对称的. 实际上注意到

$$(x, -p, \varphi_s(x, p), s, \sigma) \in \Lambda \iff (\varphi_s^{-1}(x, p), x, -p, s, \sigma) \in \Lambda.$$

所以只需要对 φ^{-1} 和 φ_s^{-1} 用第一个投影的结果即可. \square

另外, 回忆一些我们之前介绍的记号. 对 $F \in D^{lb}(M \times M), \mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$, $v : M \times M \rightarrow M \times M(x, y) \mapsto (y, x)$. 令

$$F^{-1} = v^{-1} R\mathcal{H}om(F, \omega_M \overset{L}{\boxtimes} k_M),$$

$$\mathcal{K}^{-1} = (v \times \text{id}_I)^{-1} R\mathcal{H}om(\mathcal{K}, \omega_M \overset{L}{\boxtimes} k_M \overset{L}{\boxtimes} k_I).$$

注意, 其中 ω_M 是对偶层, 不是 T^*M 的辛形式.

另外, 在例2.3.2中, 我们也计算了

$$\mathcal{K}_{s_0} := \mathcal{K}|_{s=s_0} \cong \mathcal{K} \circ k_{s=s_0}$$

其中卷积对 $M_1 = M \times M, M_2 = I, M_3 = \{\text{pt}\}$. 计算.

我们将会看到, 如果 \mathcal{K} 是一个齐性哈密顿同胚的层量子化, 那么 $(\mathcal{K}^{-1})_s \cong (\mathcal{K}_s)^{-1}$.

接下来, 我们开始证明唯一性定理.

定理 5.1.1. [10, 命题 3.2] 令 $\varphi : \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是齐次哈密顿同痕. 假设存在 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$, 使得

- 1) $SS(\mathcal{K}) \subset \text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{M \times M \times I}$,
- 2) $\mathcal{K}_0 = k_\Delta$.

那么, 则有

- a) $\text{supp}(\mathcal{K}) \subset B$, 且 $\text{supp}(\mathcal{K}) \rightrightarrows M \times I$ 分别是逆紧的,

$$b) \mathcal{K}_s \circ \mathcal{K}_s^{-1} \cong \mathcal{K}_s^{-1} \circ \mathcal{K}_s \cong k_\Delta,$$

c) \mathcal{K} 在相差唯一的同构的意义下唯一.

(此处的卷积由 $M_1 = M_2 = M_3 = M$ 计算)

证明. a) 考虑复合

$$\dot{\pi}_{M \times M \times I} : \dot{T}^*(M \times M \times I) \xrightarrow{h} \dot{T}^*(M \times M \times I)/\mathbb{R}_+ \rightarrow M \times M \times I,$$

其中第一个是映射是商映射, 第二个映射拓扑上等价于一个球丛. 所以第二个映射是逆紧的, 从而是闭映射.

此时, Λ 是闭的 \mathbb{R}_+ 不变子集. 于是 $h(\Lambda) \subset \dot{T}^*(M \times M \times I)/\mathbb{R}_+$ 是闭子集, 从而根据上述讨论 $\dot{\pi}_{M \times M \times I}(\Lambda)$ 是闭子集.

因此, 如果 $(x, y, t) \notin B$, 根据 B 的定义, 则存在开集 $x \in U, y \in V, I_t \subset J$ 使得 $\dot{\pi}_{M \times M \times I}^{-1}(U \times V \times J) \cap \Lambda = \emptyset$.

于是 1) 告诉我们, $SS(\mathcal{K}|_{U \times V \times J}) \subset 0_M$. 从而 $\mathcal{K}|_{U \times V \times J}$ 是局部常值的. 然而, 因为 $\Delta \times \{0\} \subset \dot{\pi}_{M \times M \times I}(\Lambda)$, 则 $U \times V \cap \Delta \neq \emptyset$. 且 $0 \in J$. 所以, 必须有 $\mathcal{K}|_{U \times V \times \{0\}} \cong 0$, 从而 $\mathcal{K}|_{U \times V \times J} \cong 0$, 因此 $(x, y, t) \notin \text{supp}(\mathcal{K})$.

于是有, $\text{supp}(\mathcal{K}) \subset B$. 而逆紧性则由引理 5.1.1 得到.

b) 令 $F = \mathcal{K} \circ_I \mathcal{K}^{-1}$, 我们来证明 $F \cong k_{\Delta \times I}$. 为此, 我们来估计 F 的奇异支撑.

首先, 由于 $\omega_M \boxtimes^L k_M \boxtimes^L k_I \cong q_1^{-1} \omega_M$, 其中 $q_1 : M \times M \times I \rightarrow M$ 是到第一个因子的投影. 于是由于 ω_M 是局部常值层, 则 $\omega_M \boxtimes^L k_M \boxtimes^L k_I \cong q_1^{-1} \omega_M$ 是局部常值层.

因此 $\omega_M \boxtimes^L k_M \boxtimes^L k_I \cong q_1^{-1} \omega_M \subset 0_{M \times M \times I}$, 于是根据第一章推论 1.2 2), 有 $SS(R\mathcal{H}om(\mathcal{K}, \omega_M \boxtimes^L k_M \boxtimes^L k_I)) \subset -SS(\mathcal{K})$.

显然, $v \times I$ 是一个微分同胚, 自然是非特征的. 于是 $SS(\mathcal{K}^{-1}) \subset d(v \times I)^*(-SS(\mathcal{K}))$. 则结合 a) 知相对卷积 F 满足上界公式 2.3 的逆紧性条件. 另外, 下面的计算告诉我们, 零截面条件也是满足的. 于是根据上界公式有

$$SS(F) \subset SS(\mathcal{K}) \circ_I SS(\mathcal{K}^{-1}) \subset (\Lambda \cup 0_{M \times M \times I}) \circ_I d(v \times I)^*(-\Lambda \cup 0_{M \times M \times I}).$$

事实上, 回顾到,

$$\Lambda = \text{ExGraph}(\varphi)^a = \{(x, -p, \varphi(x, p, s), s, -H(\varphi(x, p, t), s)) : (x, p) \in \dot{T}^*M, s \in I\}.$$

于是,

$$d(v \times I)^*(-\Lambda) = \{(-\varphi(x, p, s), x, p, s, H(\varphi(x, p, t), s)) : (x, p) \in \dot{T}^*M, s \in I\}$$

从而参考 1.3 节的公式 2.3, 得到

$$\begin{aligned} (\Lambda \cup 0_{M \times M \times I}) \circ_I d(v \times I)^*(-\Lambda \cup 0_{M \times M \times I}) &= \{(x, p, x, -p, s, 0) : x \in M, s \in I\} \cup 0_{M \times I} \\ &\subset T^*(M \times M) \times 0_I. \end{aligned}$$

则根据推论 2.2.3 有

$$F \cong p^{-1}Rp_*F, \quad p : M \times M \times I \rightarrow M \times M \text{ 是投影.}$$

于是

$$F_s \cong i_s^{-1}p^{-1}Rp_*F \cong Rp_*F, \forall s \in I.$$

其中 $i_s : M \times M \rightarrow M \times M \times I, (x, y) \mapsto (x, y, s)$

于是, 只需证明 $F_0 \cong Rp_*F \cong k_\Delta$. 此时, 根据伴随性, 并且逐点检查有

$$\begin{aligned} &i_s^!R\mathcal{H}om(\mathcal{K}, k_{M \times M \times I}) \\ &\cong R\mathcal{H}om(i_s^{-1}\mathcal{K}, i_s^!k_{M \times M \times I}) \\ &\cong R\mathcal{H}om(\mathcal{K}_s, k_{M \times M}) \otimes^L i_s^!k_{M \times M \times I}. \end{aligned}$$

另一方面, 由于 $SS(\mathcal{K}) \subset \Lambda \cup 0_M$, 则由根据 2.2.4 的 2) 和 4.2.2 的 3), 有

$$i_s^!R\mathcal{H}om(\mathcal{K}, k_{M \times M \times I}) \cong i_s^{-1}R\mathcal{H}om(\mathcal{K}, k_{M \times M \times I}) \otimes^L i_s^!k_{M \times M \times I}.$$

于是

$$\begin{aligned} &i_s^{-1}R\mathcal{H}om(\mathcal{K}, k_{M \times M \times I}) \otimes^L i_s^!k_{M \times M \times I} \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{K}_s, k_{M \times M}) \otimes^L i_s^!k_{M \times M \times I} \\ &\Rightarrow i_s^{-1}R\mathcal{H}om(\mathcal{K}, k_{M \times M \times I}) \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{K}_s, k_{M \times M}) \\ &\Rightarrow (\mathcal{K}^{-1})_s \cong \mathcal{K}_s^{-1}. \end{aligned}$$

其中, $i_s^!k_{M \times M \times I}$ 实际上是一个定向层的平移, 所以直接对第一行做一个适当的张量积即可得到第二行. 而第三行是因为, 我们只需要得到一个局部同构, 而这由第二行即可保证. 接下来, 计算 $i_s^{-1}F$, 考虑拉回方块,

$$\begin{array}{ccc} M \times M \times I & \xrightarrow{\tilde{i}_s} & M \times M \times M \times I \\ \downarrow q_{13} & & \downarrow q_{13I} \\ M \times M & \xrightarrow{i_s} & M \times M \times I \end{array}$$

其中 $\tilde{i}_s : (x, y, z) \mapsto (x, y, z, s)$. 则用逆紧基变换有

$$\begin{aligned}
 i_s^{-1}F &= i_s^{-1}R(q_{13!}) \left(q_{12!}^{-1} \mathcal{K}^L \otimes q_{23!}^{-1} \mathcal{K}^{-1} \right) \\
 &\cong Rq_{13!} \tilde{i}_s^{-1} \left(q_{12!}^{-1} \mathcal{K}^L \otimes q_{23!}^{-1} \mathcal{K}^{-1} \right) \\
 &\cong Rq_{13!} \left(\tilde{i}_s^{-1} q_{12!}^{-1} \mathcal{K}^L \otimes \tilde{i}_s^{-1} q_{23!}^{-1} \mathcal{K}^{-1} \right) \\
 &\cong Rq_{13!} \left(q_{12!}^{-1} i_s^{-1} \mathcal{K}^L \otimes q_{23!}^{-1} i_s^{-1} \mathcal{K}^{-1} \right) \\
 &\cong Rq_{13!} \left(q_{12!}^{-1} \mathcal{K}_s^L \otimes q_{23!}^{-1} (\mathcal{K}^{-1})_s \right) \\
 &\cong Rq_{13!} \left(q_{12!}^{-1} \mathcal{K}_s^L \otimes q_{23!}^{-1} \mathcal{K}_s^{-1} \right) \\
 &\cong \mathcal{K}_s \circ \mathcal{K}_s^{-1}.
 \end{aligned}$$

由于我们已有假定 $\mathcal{K}_0 = k_\Delta$, 所以只需证明 $\mathcal{K}_0^{-1} \cong k_\Delta^{-1} \cong k_\Delta$.

令 $\delta : M \rightarrow M \times M$ 为对角映射, 并注意到 $\omega_M \overset{L}{\boxtimes} k_M \cong q_2^! k_M$, 其中 $q_2 : M \times M \rightarrow M$ 是第二个投影.

$$\begin{aligned}
 k_\Delta^{-1} &\cong v^{-1} R\mathcal{H}om(k_\Delta, q_2^! k_M) \\
 &\cong v^{-1} R\Gamma_\Delta(q_2^! k_M) \\
 &\cong v^{-1} \delta_! \delta^{-1} R\Gamma_\Delta q_2^! k_M \\
 &\cong v^{-1} \delta_! (q_2 \delta)^! k_M \\
 &\cong v^{-1} \delta_! k_M \\
 &\cong v^{-1} k_\Delta \\
 &\cong k_\Delta.
 \end{aligned}$$

故得到了我们想要的结果.

另外, 对 $F' = \mathcal{K}^{-1} \circ_I \mathcal{K}$, 上面的过程可以完全不变的施行. 于是亦有 $F' \cong k_{\Delta \times I}$, 与 $F'_s \cong \mathcal{K}_s \circ \mathcal{K}_s^{-1} \cong k_\Delta$.

c) 取 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ 为 ϕ 的两个满足 1), 2) 的层量子化.

令 $L := \mathcal{K}_1^{-1} \circ_I \mathcal{K}_2$. 同样, 上述 b) 的过程可以原封不动的对 L 施行. 从而 $L \cong k_{\Delta \times I}$. 于是,

$$\mathcal{K}_1 \cong \mathcal{K}_1 \circ_I k_{\Delta \times I} \cong \mathcal{K}_1 \circ_I (\mathcal{K}_1^{-1} \circ_I \mathcal{K}_2) \cong (\mathcal{K}_1 \circ_I \mathcal{K}_1^{-1}) \circ_I \mathcal{K}_2 \cong k_{\Delta \times I} \circ_I \mathcal{K}_2 \cong \mathcal{K}_2.$$

其中同构的唯一性是因为, 下列的每一个同构都唯一.

$$\mathcal{K}_1 \circ_I \mathcal{K}_1^{-1} \cong \mathcal{K}_1^{-1} \circ_I \mathcal{K}_2 \cong k_{\Delta \times I}$$

□

回顾定理的证明, 其中 b) 的结果可以推广的相当一般的情形. 我们陈述以下结果

命题 5.1.1. [10, 引理 3.3] 令 $\varphi_i : \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M, i = 1, 2$ 是两个齐性辛同痕, \mathcal{K}_i 分别为其层量子化. 假设, 存在开集 $U \subset M$, 使得在 $\pi_M^{-1}(U) \times I$ 上, $\phi_1 = \phi_2$. 则存在唯一的同构

$$\psi : \mathcal{K}_1|_{U \times M \times I} \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}_2|_{U \times M \times I}$$

使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} i_0^{-1}\mathcal{K}_1 & \longrightarrow & i_0^{-1}\mathcal{K}_2 \\ & \searrow \cong & \swarrow \cong \\ & & k_{\Delta_U} \end{array}$$

其中 $\Delta_U = \Delta \cap (U \times M)$

证明. 只需对 $\phi_s := (\phi_2)_t^{-1} \circ (\phi_1)_t^{-1}$ 在 $U \times M \times I$ 上重复定理 5.1.1b) 的证明. 在此不赘述. □

5.2 正规化余测地流的层量子化

本节对归一化的测地流构造局部层量子化, 同时它将作为我们存在性定理的一个组成因素. 在 M 上取一个黎曼度量 g , 从而诱导了一个余切丛上的度量 g^* . 考虑齐次函数

$$T^*M \rightarrow \mathbb{R}, (x, p) \mapsto |p|$$

其中 $|p| = \sqrt{g^*(p, p)}$.

令 φ_s 为上述长度函数的哈密顿流, 称之为正规化余测地流. 如果用度量 g 将切丛和余切丛等同, 则 φ_s 恰为单位速度测地流, 此即 φ_s 得名的原因.

命题 5.2.1. 对任何紧集 $C \subset M$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对 $Z = \{(x, y, s) \in C \times M \times [0, \varepsilon] : d(x, y) \leq s\}$, 层 $k_Z \in D^b(M \times M \times I)$ 满足

$$SS(k_Z) \subset \text{ExGraph}(\varphi)^a.$$

证明. 根据黎曼几何的标准结果, 存在 $\delta > 0$, 使得若 $x \in C, y \in M, d(x, y) < \delta$, 则存在唯一的极小测地线连接 x, y , 且此测地线长度小于 δ , 并且此测地线光滑的依赖于端点. 我们取 $0 < \varepsilon < \delta$.

令 $U = \{(x, y, s) \in C \times M \times [0, \varepsilon] : d(x, y) < s\}$, 于是 $Z = \bar{U}$, 且 Z 有光滑边界 ∂U . 从而, 根据我们关于常值层奇异支撑的计算, 知

$$SS(k_Z) = Z \cup N_i^*.$$

其中 N_i^* 为 ∂U 的内余法丛. 于是, 我们只需计算 N_i^* .

取 $(x, y, s) \in \partial U$, $v \in T_x M$ 是连接 x, y 的极小测地线的单位初方向, 将 v 沿此测地线的平行移动到 y , 记为 $\tilde{v} \in T_y M$.

根据 Gauss 引理:

$$g_y(\tilde{w}, \tilde{v}) = 0 \Rightarrow (0, \tilde{w}, 0) \in T_{(x, y, s)} \partial U,$$

$$g_x(w, v) = 0 \Rightarrow (w, 0, 0) \in T_{(x, y, s)} \partial U.$$

另外, 对充分小的 $\theta > 0$, 有 $(x, \exp_x((s+\theta)v), s+\theta) \in \partial U$ 且 $(\exp_x(\theta v), y, s-\theta) \in \partial U$, 于是

$$(v, 0, -1) \in T_{(x, y, s)} \partial U, \quad (0, \tilde{v}, 1) \in T_{(x, y, s)} \partial U$$

则由于维数原因

$$T_{(x, y, s)} \partial U = \{(w, \tilde{w}, \kappa) : g_y(\tilde{w}, \tilde{v}) - g_x(w, v) - \kappa = 0\}.$$

所以

$$(N_i^*)_{(x, y, s)} = \{(x, -\sigma \iota_v g_x, y, \sigma \iota_{\tilde{v}} g_y, s, -\sigma) : \sigma > 0\}.$$

然而, 根据构造, $y = \exp_x(v)$, \tilde{v} 是 v 的平行移动, 从而 $\phi_s(x, -\sigma \iota_v g_x) = (y, \sigma \iota_{\tilde{v}} g_y)$. 并且根据由诱导度量和平行移动的性质, 有 $g_y^*(\iota_{\tilde{v}} g_y, \iota_{\tilde{v}} g_y) = g_x(v, v)$. 于是 $\sigma = H(\phi_s(x, \sigma \iota_v g_x), s)$.

则

$$SS(k_Z) = Z \cup N_i^* \subset \text{ExGraph}(\varphi)^a.$$

□

此处借助层量子化的唯一性定理, 我们可以得到

推论 5.2.1. 对任何相对紧的开子集 $O \subset M$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对 $U_\varepsilon = \{(x, y) \in M \times O : d(x, y) < \varepsilon\}$, $Z_\varepsilon = \overline{U_\varepsilon}$, 层 $L = k_{Z_\varepsilon} \in D^b(O \times O)$ 满足

$$L^{-1} \circ L \cong k_{\Delta_O}.$$

5.3 层量子化的存在性-水平紧支撑情形

首先叙述一个基本的技术性引理.

引理 5.3.1 (扩张引理). [10, 引理 3.4] 设 N 为流形, $A \subset N$ 是紧集, I 是一个包含 0 的区间. 令 $L_s \subset \dot{T}^*N$ 是一族光滑的拉格朗日子流形. 定义 \mathbb{R}_+ 不变的拉格朗日子流形

$$L = \cup_{s \in I} L_s \times \{(s, 0)\}.$$

假设存在 $V_0 \subset N$ 是具有光滑边界的开集, 使得 $L_0 = SS(k_{\overline{V_0}})$. 并且在一个紧集 C 外, 形变 L_s 平凡, 即

$$L \cap \dot{T}^*((N \setminus A) \times I) = L_0 \times 0_I.$$

则存在 $\varepsilon > 0, \pm\varepsilon \in I$ 与带有光滑边界的开集 $V \subset N \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 使得,

- 1) $V_0 = V \cap (N \times \{0\})$,
- 2) $L = SS(k_{\overline{V}}) \cap \dot{T}^*(N \times (-\varepsilon, \varepsilon))$,
- 3) $L_s = SS(k_{\overline{V \cap (N \times \{s\})}}) \cap \dot{T}^*N, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

其证明较为繁琐, 但是比较初等, 我们在此略去.

定义 5.3.1. 对一个齐性哈密顿同痕 $\varphi : \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$, 如果 φ_s 在 $\pi_M^{-1}(C)$ 外是恒等, 其中 $\pi_M : \dot{T}^*M \rightarrow M, C \subset M$ 紧, 则我们说 φ 是水平紧支撑的.

定理 5.3.1. [10, 引理 3.5] 令 $\varphi : \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是具有水平紧支撑的齐次哈密顿同痕. 则存在 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$, 使得

- 1) $SS(\mathcal{K}) \subset \text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{M \times M \times I}$,
- 2) $\mathcal{K}_0 = k_{\Delta}$.

证明. 首先由于条件, 假设 φ_s 在 $\dot{\pi}_M^{-1}(C)$ 之外是恒等映射, 其中 $C \subset M$ 紧. Λ 为 φ 的增广图. 我们分两步证明:

A) 证明: 存在 ε 使得, 存在短时间层量子化 $\mathcal{K} \in D^b(M \times M \times (-\varepsilon, \varepsilon))$

利用正规化余测地流的结果 5.2.1, 取相对紧开子集 $C \subset O \subset M$, $\varepsilon_1 > 0$, $U_{\varepsilon_1} = \{(x, y) \in O \times M : d(x, y) < \varepsilon_1\}$, $Z_{\varepsilon_1} = \overline{U_{\varepsilon_1}}$. 层 $L = k_{Z_{\varepsilon_1}} \in D^b(M \times O)$ 满足 $L^{-1} \circ L \cong k_{\Delta_O}$, 且 $SS(k_{Z_{\varepsilon_1}}) \subset \Gamma_{Z_{\varepsilon_1}} \cup Z_{\varepsilon_1}$, 其中 $\Gamma_{Z_{\varepsilon_1}}$ 是 Z_{ε_1} 的内余法丛.

另外, 设 Λ_O 为 φ 在 O 上限制的增广图. 且对 $s \in I$, 令

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda} &:= \Gamma_{Z_{\varepsilon_1}} \circ \Lambda_O \subset \dot{T}^*M \times \dot{T}^*O \times T^*I, \\ \tilde{\Lambda}_s &:= \Gamma_{Z_{\varepsilon_1}} \circ \Lambda_{O,s} \subset \dot{T}^*M \times \dot{T}^*O.\end{aligned}$$

注意到 $\tilde{\Lambda}_s := \tilde{\Lambda} \circ T_s^*I$, $\tilde{\Lambda}_0 = SS(k_{Z_{\varepsilon_1}}) \cap \dot{T}^*(O \times I)$.

设 $N = M \times O$, $A = C \times C$, $V_0 = U_{\varepsilon_1}$ 可以验证, $\tilde{\Lambda}_s$ 满足引理 5.3.1 条件, 于是存在 $\varepsilon > 0$, 和开集 $V \subset M \times O \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, 使得 $\tilde{L} := k_{\tilde{V}} \in D^b(M \times O \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ 满足

- $SS(\tilde{L}) \subset \left(\tilde{\Lambda} \times_I (-\varepsilon, \varepsilon) \right) \cup \left(0_{M \times O \times (-\varepsilon, \varepsilon)} \right)$,
- $\tilde{L}|_{M \times O \times \{0\}} = k_{\tilde{V} \cap M \times O \times \{0\}} \cong k_{Z_{\varepsilon_1}} = L$,
- $\text{supp}(\tilde{L}) \rightarrow O \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 逆紧.

现在令

$$\mathcal{K} = L^{-1} \circ \tilde{L} \in D^b(U \times U \times (-\varepsilon, \varepsilon))$$

于是结合逆紧性条件 c), 根据相对卷积的上界公式 (2.3) 有

$$\begin{aligned}SS(\mathcal{K}) &\subset SS(L^{-1}) \circ \left(\tilde{\Lambda} \times_I (-\varepsilon, \varepsilon) \cup 0_{M \times O \times (-\varepsilon, \varepsilon)} \right) \\ &\subset \left(SS(L^{-1}) \circ (\Gamma_{Z_{\varepsilon_1}} \cup 0_{Z_{\varepsilon_1}}) \circ \Lambda_O \right) \cup 0_{M \times M \times (-\varepsilon, \varepsilon)} \\ &= \left(SS(L^{-1}) \circ SS(L) \circ \Lambda_O \right) \cup 0_{M \times M \times (-\varepsilon, \varepsilon)} \\ &\subset \left(T_{\Delta_O}^*(O \times O) \circ \Lambda_O \right) \cup 0_{M \times M \times (-\varepsilon, \varepsilon)} \\ &\subset \Lambda_O \cup 0_{M \times M \times (-\varepsilon, \varepsilon)}\end{aligned}$$

另外还有

$$\mathcal{K}_0 \cong L^{-1} \circ \tilde{L} \circ k_{s=0} \cong L^{-1} \circ L \cong k_{\Delta_O}.$$

从而, $\mathcal{K} = L^{-1} \circ \tilde{L} \in D^b(U \times U \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ 是 φ 在 U 上限制的层量子化.

并且, 由于 φ 在 $U \setminus C$ 上的限制为恒等, 则由唯一性定理的推论5.1.1得到

$$\mathcal{K} \Big|_{[(U \times U) \setminus (C \times C)] \times (-\varepsilon, \varepsilon)} \cong k_{\Delta_M \times (-\varepsilon, \varepsilon)} \Big|_{[(U \times U) \setminus (C \times C)] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}.$$

所以, 利用命题2.4.1 可以将层 \mathcal{K} 和层 $k_{\Delta_M \setminus C \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ 粘和, 使得 \mathcal{K} 延拓为 $\tilde{\mathcal{K}} \in D^b(M \times M \times (-\varepsilon, \varepsilon))$, 使其满足

$$\tilde{\mathcal{K}} \Big|_{[(M \times M) \setminus (C \times C)] \times (-\varepsilon, \varepsilon)} \cong k_{\Delta_M \times (-\varepsilon, \varepsilon)} \Big|_{[(M \times M) \setminus (C \times C)] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}.$$

并且, 由于粘和常值层只会在奇异支撑中增加零余向量, 则 $\tilde{\mathcal{K}}$ 就是我们希望的短时间层量子化.

B) 接下来我们对时间变量延拓上面得到的短时间层量子化. 考虑集合 $G = \{(J, \mathcal{K}_J)\}$, 其中 $J \subset I$ 是包含 0 的子区间, \mathcal{K}_J 是 $\varphi_s, s \in J$ 的层量子化. 带上一个偏序关系

$$(J, \mathcal{K}_J) \leq (J', \mathcal{K}_{J'}) \iff J \subset J', \text{ 且 } \mathcal{K}_{J'} \Big|_{M \times M \times J} \cong \mathcal{K}_J.$$

其中, $\mathcal{K}_{J'} \Big|_J$ 是 $\mathcal{K}_{J'} \Big|_{M \times M \times J}$ 的简记, 以下皆遵循此约定.

于是, 唯一性定理5.1.1和命题2.4.2确保, 如果我们将有界复形 \mathcal{K}_J 视为局部有界复形, 则偏序集 (G, \leq) 的每个全序子集有上界. 于是根据 Zorn 引理, (G, \leq) 存在极大元 (J, \mathcal{K}_J) 使得 $\mathcal{K}_J \in D^{lb}(M \times M \times J)$, 所以接下来我们只需证明 $J = I$.

令 $J = (s_0, s_1)$, 不妨设 $s_1 \in I$, 考虑齐次哈密顿同痕 $\varphi_s \circ \varphi_{s_1}^{-1}, s \in I$. 于是在 A) 中得到的结果告诉我们, 存在 $s_0 < s_3 < s_1 < s_4$, 和 $L \in D^b(M \times M \times (s_3, s_4))$ 为 $\varphi_s \circ \varphi_{s_1}^{-1}$ 的一个短时间层量子化.

选择一个 $s_2 \in (s_3, s_1)$, 令

$$F = \mathcal{K}_J \Big|_{(s_3, s_1)} \circ \mathcal{K}_{J_{s_2}}^{-1},$$

$$F' = L \Big|_{(s_3, s_1)} \circ L_{s_2}^{-1}.$$

于是, 直接验证知 F 和 F' 都是 $\varphi_s \circ \varphi_{s_2}^{-1}, s \in (s_3, s_1)$ 的层量子化. 于是根据唯一性, $F \cong F'$, 且

$$\mathcal{K}_J \Big|_{(s_3, s_1)} \cong \mathcal{K}_J \Big|_{(s_3, s_1)} \circ L_{s_2}^{-1} \circ \mathcal{K}_{J_{s_2}}^{-1}.$$

于是, 根据命题 2.4.1, 存在 $\mathcal{K}_{(s_0, s_4)} \in D^b(M \times M \times (s_0, s_4))$, 并且直接验证发现, $\mathcal{K}_{(s_0, s_4)}$ 是 $\varphi_s, s \in (s_0, s_4)$ 的层量子化. 这与 (J, \mathcal{K}_J) 是极大元矛盾!

于是, $J = I$.

综上, 我们已经得到了水平紧支撑情形的齐性哈密顿同痕的层量子化的存在性. \square

5.4 层量子化的存在性

本节我们将完成主定理的证明.

定理 5.4.1. [10, 定理 3.7] 令 $\varphi : \dot{T}^*M \times I \rightarrow \dot{T}^*M$ 是齐次哈密顿同痕. 则存在 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$, 使得

- 1) $SS(\mathcal{K}) \subset \text{ExGraph}(\varphi)^a \cup 0_{M \times M \times I}$,
- 2) $\mathcal{K}_0 = k_\Delta$.

证明. 取 $M \times I$ 的上升子集列 $U_n \times J_n$, 使得 $U_n \subset M, J_n \subset I$ 分别为相对紧的开子集, 且 J_n 包含原点. 于是由于 φ 是齐次的, 则 $\dot{\pi}_M(\varphi(\dot{T}^*U_n, J_n))$ 是相对紧集. 于是, 取紧支光滑函数 g_n 使得 $g_n \Big|_{\dot{\pi}_M(\varphi(\dot{T}^*U_n, J_n))} = 1$.

令 φ 对应的齐次哈密顿函数为 H , 考虑齐次函数 $H_n := \dot{\pi}_m^* g_n H : \dot{T}^*M \times I \rightarrow \mathbb{R}$. 并令 H_n 对应的哈密顿同痕为 φ_n .

则 φ_n 是有水平紧支撑的齐次哈密顿同痕, 且 $\varphi_n \Big|_{\dot{T}^*U_n \times J_n} = \varphi \Big|_{\dot{T}^*U_n \times J_n}$.

取 $\mathcal{K}_n \in D^{lb}(M \times M \times I)$ 为 φ_n 的层量子化,

$$SS(\mathcal{K}_n) \cap \dot{T}^*(U_n \times M \times J_n) \subset \Lambda \cup \dot{T}^*(U_n \times M \times J_n),$$

$$\mathcal{K}_n \Big|_{M \times M \times \{0\}} = k_{\Delta_M}.$$

于是, 根据命题 5.1.1(唯一性定理的推论). 则有

$$\mathcal{K}_{n+1} \Big|_{U_n \times M \times J_n} \cong \mathcal{K}_n \Big|_{U_n \times M \times J_n}.$$

于是根据命题 2.4.2, 存在 $\mathcal{K} \in D^{lb}(M \times M \times I)$ 与同构 $\mathcal{K} \Big|_{U_n \times M \times J_n} \cong \mathcal{K}_n \Big|_{U_n \times M \times J_n}$.

并且, 根据上述同构和奇异支撑估计, 直接验证即有 \mathcal{K} 是齐次哈密顿同痕 φ 的层量子化. \square

注记 5.4.1. 根据这两节的证明过程知, 如果 φ 是水平紧支撑的, 并且 I 是有界开区间, 则 φ 的层量子化 $\mathcal{K} \in D^b(M \times M \times I)$.

例 5.4.1. 最后, 我们用一个例子来说明, 层量子化是必须在局部有界导出范畴中考虑的.

令 $M = S^n$ 为标准球面, 带上标准度量 g . 不妨用 g 将 T^*M 和 TM 等同, 并且我们将自由的切换两种观点.

如 5.2 节一样, 考虑长度函数 $H(x, p) = |p|$, 于是 H 定义的齐次哈密顿同痕 $\varphi: TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 给出了正规化的测地流.

$\forall x, y \in M, d(x, y) + d(x, a(y)) = \pi$, 其中 $a: M \rightarrow M$ 是对径映射. 对 $\forall l \in \mathbb{Z}$, 令

$$C_l = \begin{cases} \{(x, y, s) \in M \times M \times \mathbb{R} : s \geq l\pi, \text{ 且 } d(x, a^l(y)) \leq s - l\pi\}, & l \geq 0 \\ \{(x, y, s) \in M \times M \times \mathbb{R} : s < (l+1)\pi, \text{ 且 } d(x, a^{l+1}(y)) < -s + (l+1)\pi\}, & l < 0 \end{cases}$$

若 \mathcal{K} 为 φ 的层量子化, 则同我们在 4.2 节的计算一样, 有

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{K}) = \begin{cases} k_{C_l}, & \exists l \geq 0 \text{ 使得 } k = (n-1)l, \\ k_{C_l}, & \exists l < 0 \text{ 使得 } k = (n-1)l, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

于是 \mathcal{K} 是局部有界的.

参考文献

- [1] Sato M. Theory of hyperfunctions. I.[J]. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I, 1959, 8: 139–193.
- [2] Sato M. Theory of hyperfunctions. II.[J]. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I, 1960, 8: 387–437.
- [3] Sato M. Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations.[Z]. [S.l.: s.n.], 1971.
- [4] Kashiwara M, Schapira P. Micro-support des faisceaux: application aux modules différentiels.[J]. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, 1982, 295: 487–490.
- [5] Kashiwara M, Schapira P. Microlocal study of sheaves.: volume 128[M]. [S.l.]: Société Mathématique de France, Paris, 1985.
- [6] Kashiwara M, Schapira P. Grundlehren der mathematischen wissenschaften: volume 292 sheaves on manifolds[M]. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990.
- [7] Tamarkin D. Microlocal condition for non-displaceability[J]. arXiv:0809.1584 math.SG, 2008.
- [8] Guillermou S, Schapira P. Microlocal theory of sheaves and Tamarkin’s non displaceability theorem.[M]//Homological mirror symmetry and tropical geometry. Based on the workshop on mirror symmetry and tropical geometry, Cetraro, Italy, July 2–8, 2011. [S.l.]: Cham: Springer, 2014: 43–85.
- [9] Polesello P, Schapira P. Stacks of quantization-deformation modules on complex symplectic manifolds.[J]. Int. Math. Res. Not., 2004, 2004(49): 2637–2664.
- [10] Guillermou S, Kashiwara M, Schapira P. Sheaf quantization of hamiltonian isotopies and applications to non displaceability problems[J]. Duke Mathematical Journal, 2012, 161(2): 201–245.
- [11] Chaperon M. Quelques questions de géométrie symplectique (d’après, entre autres, Poincaré, Arnold, Conley et Zehnder). [M]//Séminaire Bourbaki: 1982/83. [S.l.]: Société Mathématique de France, Paris, 1983: 231–249.
- [12] Hofer H. Lagrangian embeddings and critical point theory.[J]. Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 1985, 2: 407–462.
- [13] Laudénbach F, Sikorav J C. Persistence d’intersection avec la section nulle au cours d’une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent.[J]. Invent. Math., 1985, 82: 349–357.

- [14] Shende V. The conormal torus is a complete knot invariant[J]. arXiv:1604.03520 math.GT, 2016.
- [15] Chiu S F. Nonsqueezing property of contact balls.[J]. Duke Math. J., 2017, 166(4): 605–655.
- [16] Guillermou S. Quantization of conic lagrangian submanifolds of cotangent bundles [J]. arXiv:1212.5818 math.SG, 2012.
- [17] Guillermou S. The gromov-eliashberg theorem by microlocal sheaf theory[J]. arXiv:1311.0184 math.SG, 2013.
- [18] Guillermou S. The three cusps conjecture[J]. arXiv:1603.07876 math.SG, 2016.
- [19] Nadler D, Zaslow E. Constructible sheaves and the Fukaya category.[J]. J. Am. Math. Soc., 2009, 22(1): 233–286.
- [20] Nadler D. Microlocal branes are constructible sheaves.[J]. Sel. Math., New Ser., 2009, 15(4): 563–619.
- [21] Tamarkin D. Microlocal category[J]. arXiv:1511.08961 math.SG, 2015.
- [22] Fang B, Liu C M, David T, et al. The coherent-constructible correspondence and homological mirror symmetry for toric varieties[J]. arXiv: 0901.4276 math:AG, 2009.
- [23] Tsygan B. A microlocal category associated to a symplectic manifold[J]. arXiv:1512.02747 math.KT, 2015.
- [24] Shende V. Microlocal category for weinstein manifolds via h-principle[J]. arXiv:1707.07663 math.SG, 2017.
- [25] Kragh T. Parametrized ring-spectra and the nearby Lagrangian conjecture.[J]. Geom. Topol., 2013, 17(2): 639–731.
- [26] Fukaya K, Seidel P, Smith I. Exact lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles[J]. Inventiones Mathematicae, 2008, 172(1): 1–27.
- [27] Abouzaid M. Nearby lagrangians with vanishing maslov class are homotopy equivalent[J]. Inventiones Mathematicae, 2012, 189(2): 251–313.
- [28] Ike Y. Compact exact lagrangian intersection in cotangent bundles via sheaf quantization[J]. arXiv:1701.02057 math.SG, 2017.
- [29] Schapira P, Tose N. Morse inequalities for r-constructible sheaves[J]. Advances in Mathematics, 1992, 93(1): 1–8.
- [30] McDuff D, Salamon D. Introduction to symplectic topology[M]. 2nd ed. [S.l.]: Clarendon Press, 1998.
- [31] Viterbo C. An introduction to symplectic topology through sheaf theory[M]. [S.l.]: Lectures at Princeton Fall and New York Spring 2011, 2011.

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果

作者简历

张秉宇，男，甘肃省张掖市人，1992 年出生，中国科学院数学与系统科学研究院硕士研究生。

通讯地址：北京市 中科院数学与系统科学研究院应用数学所

邮编：100080

E-mail: zhangbingyu15@mailsucas.ac.cn

已发表 (或正式接受) 的学术论文:

无

致 谢

首先需要感谢我的导师阮卫东研究员。在三年的研究生生活中，阮老师给了我非常严格而又认真的指导。不光是数学上的，还有做人上的。在阮老师的建议下，我对辛几何产生了非常浓厚的兴趣，并决定以此为终身目标。同时，阮老师也让我学习到了很多先进的思维方式，这让我更加适应现代数学的研究节奏，对我未来的研究工作非常有帮助。最重要的是阮老师对待数学和工作的认真与执着深深的影响着我。这是我这三年间得到的最宝贵的收获，它将影响我的一生。也要感谢阮老师在这三年对我的各方面的巨大的帮助。

同时，我还要感谢法国格勒诺布尔大学的 Stéphane Guillermou 教授。感谢 Guillermou 教授同我热心而认真的讨论，这让我对微局部层论的技术，还有层论在辛几何中的应用，有了大量细致而又深入的认识。也感谢 Guillermou 教授在我申请格勒诺布尔大学的研究生项目时提供的巨大的帮助。

并且，还要感谢中科院数学院的付保华研究员，李文威研究员，孙笑涛研究员，苏阳研究员，杨晓奎研究员在研究生期间对我的切实的帮助。感谢北京大学的方博汉教授，范辉军教授，刘小博教授在北京组织了众多的辛几何的学术活动。尤其是方博汉老师，正是由于方老师邀请到 David Treumann，从而让我了解到微局部层论与辛几何的关系，间接影响了我的学术生涯。感谢湖南大学的董超平教授，蒋月评教授，李军老师，感谢各位老师即使在我毕业之后仍然热心的关注我的发展，并提供了众多的帮助与鼓励。感谢清华大学的李思教授，田垠教授，张宇光教授，我同他们学到了大量的优美而且前沿的数学与物理。

除此之外，还要感谢学习生涯中的同学和朋友们。尤其是文学清，白宸聿，秦翊宸，李明坤，刘亚雄，和我进行了大量的认真细致而且富有成效的讨论。也感谢各位同学天天忍受我的三角轨范畴追问。感谢白少云，李吟，李正，张诗卓，和你们的讨论让我对辛几何的有了更多更有趣也非常前沿的想法。也感谢商世杰，张诗卓，王嘉项，马翘楚对我的鼓励。除此之外，还有毕宇晨，陈波，高宸，郭宁，李铎，刘晗，刘宇航，史家骏，苏晓羽，万捷，汪建平，王彬，王凯，王怡，温耀雄，夏铭辰，徐凯，袁航，杨若涛，张旭成，钟一鸣，周钰人等同学。感谢各位对我的帮助。

最后，我要特地感谢我的家人对我的支持。感谢父亲张新荣，母亲吴海红在我的学习生活中给我给予的无数无私的帮助，我无以回报！也感谢刘婧依同学，是你让我感受到了一丝数学之外的阳光。